Tentamen SF1661 Perspektiv på matematik
Lördagen 18 februari 2012, klockan 09.00 – 14.00

Skrivtid: 5 timmar
Inga tillåtna hjälpmedel
Examinator: Hans Thunberg

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del I, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses.

Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del II och de tre sista uppgifterna del III, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del III	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Del I

(1) Skissera den mängd i xy-planet som består av alla punkter som uppfyller olikheten
$$(x+3)^2+(y-4)^2 \leq 25.$$
Avgör också utan att hänvisa till din skiss, om det finns det något talpar (x, y), där $x > 0$ och $y < 0$, som uppfyller denna olikhet.

(2) a) Vilka reella tal kännetecknas av att de har en icke-periodisk oändlig decimalbråksutveckling? Ge exempel på två sådana tal.
b) Talet a kan skrivas exakt med den periodiska decimalbråksutvecklingen $a = 0.121212\ldots$. Kan man uttrycka a exakt på något annat sätt? Ange i så fall detta på enklast möjliga form.

(3) Förklara vad som menas med att en funktion är inverterbar. Visa sedan att funktionen
$$f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + 2, \quad x \geq 0,$$
är inverterbar, och bestäm dess invers.

Del II

(4) Låt z och w var de komplex talen $z = 2+2i$ och låt $w = 4-4i$.
a) Skriv z och z^{10} på polär form. (2p)
b) Förenkla följande uttryck så långt som möjligt
$$\frac{(2+2i)^{10}}{(4-4i)^4}. \qquad (2p)$$

(5) Är det sant att $\ln(x+y) = \ln(x) \cdot \ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$?
Är det sant att $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$?
Bevisa dina påståenden! Du får där så är lämpligt använda dig av potenslagarna utan att bevisa dessa.

(6) Lös ekvationen $4\sin^2 x - 4\cos x = 1$.

Del III

(7) a) Formulera Binomialsatsen! (1p)

b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

för alla naturliga tal n. (2p)

c) Tolka formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

som ett påstående om Pascals triangel. (1p)

(8) Hur många reella lösingar har ekvationen $x^{100} = e^3$?
Bestäm på lämpligt sätt ett rationellt närmevärde till varje reell lösning.

(9) Bevisa att det finns oändligt många primtal.