Tentamen SF1661 Perspektiv på matematik
Lördagen 18 februari 2012, klockan 09.00 – 14.00
Svar och lösningsförslag

(1) Skissera den mängd i xy-planet som består av alla punkter som uppfyller olikheten

$$(x+3)^2+(y-4)^2 \leq 25.$$

Avgör också utan att hänvisa till din skiss, om det finns det något talpar (x, y), där $x > 0$ och $y < 0$, som uppfyller denna olikhet.

Lösning. Den angvina mänden består av alla punkter sådana att kvadraten på deras respektive avstånd till punkten $(-3, 4)$ är mindre eller lika med 25, dvs mängden utgörs av en sluten (randen ingår) cirkelskiva med medeplpunkt i $(-3, 4)$ och radie 5 längdenheter. Speciellt passerar randcirkeln genom origo.

Antag nu att (x, y) är en punkt där $x > 0$ och $y < 0$. Då är $|x+3| > 3$ och $|y-4| > 4$ så att

$$(x+3)^2 > 3^2 = 9 \quad \text{och} \quad (y-4)^2 = |y-4|^2 > 4^2 = 16.$$

Följaktligen är då

$$(x+3)^2+(y-4)^2 > 9+16 = 25,$$

dvs (x, y) tillhör inte den angivna mängden

Svar. Den angivna mängden är en sluten cirkelskiva med medeplpunkt i $(-3, 4)$ och radie 5 längdenheter. Inga punkter (x, y) där $x > 0$ och $y < 0$ ingår i denna cirkelskiva.

---

(2) a) Vilka reella tal kännetecknas av att de har en icke-periodisk oändlig decimalbråksutveckling? Ge exempel på två sådana tal.
b) Talet a kan skrivas exakt med den periodiska decimalbråksutvecklingen $a = 0.121212\ldots$. Kan man uttrycka a exakt på något annat sätt? Ange i så fall detta på enklast möjliga form.

Lösning. a) Det är de irrationella talen och inga andra tal är de som har icke-periodisk oändlig decimalbråksutveckling. $\sqrt{2}$ och π är exempel på sådana tal.

b) Låt $a = 0.121212\ldots$. Då är $100a = 12.1212\ldots$ och

$$99a = 100a - a = 12.1212\ldots - 0.121212\ldots = 12 \implies a = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Svar. a) Det är precis de irrationella talen som har icke-periodisk oändlig decimalbråksutveckling. $\sqrt{2}$ och π är exempel på sådana tal. b) $a = \dfrac{4}{33}$.

---

(3) Förklara vad som menas med att en funktion är inverterbar. Visa sedan att funktionen

$$f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + 2, \quad x \geq 0,$$

är inverterbar, och bestäm dess invers.

Lösning. En funktion $f : X \to Y$ är inverterbar om det till varje $y \in Y$ finns precis ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$.

Antag nu att $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)} + 2$, $x \geq 0$ och att $y = f(x)$. Eftersom rotfunktionen alltid är icke-negativ per definition följer att $y \geq 2$. Det gäller då att

$$y = \sqrt{\ln(x+1)} + 2 \iff y - 2 = \sqrt{\ln(x+1)} \iff (y-2)^2 = \ln(x+1)$$
$$\iff e^{(y-2)^2} = x + 1 \iff x = e^{(y-2)^2} - 1.$$

(Den andra ekvivalensen $y - 2 = \sqrt{\ln(x+1)} \iff (y-2)^2 = \ln(x+1)$ är verkligen en ekvivalens eftersom vi har konstaterat att $y \geq 2$, det utesluter möjligheten att $(y-2)^2 = \ln(x+1) \implies y - 2 = -\sqrt{\ln(x+1)}$).

Alltså gäller att för varje $y \geq 2$ finns precis ett $x = x(y) = e^{(y-2)^2} - 1$ sådant att $y = f(x)$, dvs f är inverterbar och dess invers ges av

$$f^{-1}(x) = e^{(x-2)^2} - 1.$$

Svar. En funktion $f : X \to Y$ är inverterbar om det till varje $y \in Y$ finns precis ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Med f som i uppgiften är f inverterbar och dess invers ges av $f^{-1}(x) = e^{(x-2)^2} - 1$.

---

(4) Låt z och w var de komplex talen $z = 2 + 2i$ och låt $w = 4 - 4i$.

a) Skriv z och z^{10} på polär form. (2p)

b) Förenkla följande uttryck så långt som möjligt

$$\frac{(2+2i)^{10}}{(4-4i)^4}. \qquad \text{(2p)}$$

Lösning. a) Om $z = 2 + 2i$ är $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2^{3/2}$, så

$$z = 2 + 2i = 2^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Det följer att

$$z^{10} = (2^{3/2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 2^{30/2}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{15}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2^{15}i$$

b) Om $w = 4 - 4i$ är $|w| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = 2^{5/2}$, och

$$w = 4 - 4i = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2^{5/2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

så

$$\begin{aligned} w^4 &= \left(2^{5/2}\right)^4\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^4 = 2^{10}\left(\cos\frac{4\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{4\cdot 7\pi}{4}\right) \\ &= 2^{10}\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right) = -2^{10} \end{aligned}$$

Det följer att

$$\frac{(2+2i)^{10}}{(4-4i)^4} = \frac{2^{15}i}{-2^{10}} = -2^5 i = -32i$$

Svar. a) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ och $z^{10} = 2^{15}i$. b) $-32i$.

---

(5) Är det sant att $\ln(x+y) = \ln(x)\cdot\ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$?
Är det sant att $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$?
Bevisa dina påståenden! Du får där så är lämpligt använda dig av potenslagarna utan att bevisa dessa.

Svar = Lösning. Det är inte sant att $\ln(x+y) = \ln(x)\cdot\ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$, eftersom t ex $x = y = 1$ ger

$$\text{V.L.} = \ln 2 = \ln(1+1) \neq \ln 1 + \ln 1 = 0 + 0 = 0 = \text{H.L.}.$$

Däremot är det sant $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ för alla $x > 0$, $y > 0$ ty

$$e^{\text{V.L.}} = e^{\ln(xy)} = xy.$$

och

$$e^{\text{H.L.}} = e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}\cdot e^{\ln(y)} = x\cdot y = e^{\text{V.L.}},$$

där andra likheten föjer av potenslagarna. Eftersom $e^a = e^b \iff a = b$ följer att V.L. = H.L.

---

(6) Lös ekvationen $4\sin^2 x - 4\cos x = 1$.

Lösning. Vi utnyttjar först trigonometriska ettan till att skriva ekvationen som

$$4\left(1 - \cos^2 x\right) - 4\cos x = 1 \iff 4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0 \iff \cos^2 x + \cos x - \frac{3}{4} = 0.$$

Låt sedan $t = \cos x$, då är $-1 \leq t \leq 1$. Vi substituerar i ekvationen och får

$$t^2 + t - \frac{3}{4} = 0 \iff \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0 \iff \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \iff \left(t + \frac{1}{2}\right) = \pm 1 \iff t = -\frac{1}{2} \pm 1.$$

Eftersom $-1 \leq t \leq 1$ är $t = \dfrac{1}{2}$ enda lösning, dvs $\cos x = \dfrac{1}{2}$ vilket är ekvivalent med att

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2n\pi \\ \frac{-\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Svar. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ eller $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$ för godtyckliga heltal n.

---

(7) a) Formulera Binomialsatsen! (1p)

b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

för alla naturliga tal n. (2p)

c) Tolka formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

som ett påstående om Pascals triangel. (1p)

Lösning=Svar a) Binomialsatsen lyder som följer:
För varje naturligt tal n gäller att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{där} \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k(k-1)\cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}.$$

b) Om vi sätter $a = b = 1$ i Binomialformeln fås

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{V.S.B}$$

c) Numrera raderna i Pascals triangel så att toppraden som bara består av en etta ges nummer 0, nästa rad bestående av två ettor ges nummer 1 osv .

Påståendet säger då att summan av talen i rad nr n i Pascals triangel är 2^n. Till exempel fås för $n = 2$:

$$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2.$$

---

(8) Hur många reella lösingar har ekvationen $x^{100} = e^3$?
Bestäm på lämpligt sätt ett rationellt närmevärde till varje reell lösning.

Lösning

Från en en skiss ser man att den parabelliknande kurvan $y = x^{100}$ skär linjen $y = e^3$ i två punkter, dessa har x-koordinater $x = \pm e^{3/100}$.

Vi bestämmer nu ett närmevärde till $e^{3/100}$ genom linjär approximation av funktionen $f(t) = e^t$ kring $t = 0$. Vi har att $f'(t) = e^t$ så $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$. Formeln för linjär approximation säger att

$$f(t) \approx f(a) + f'(a)(t - a)$$

för t nära a. Med $f(t) = e^t$ och $a = 0$ får vi

$$e^t \approx 1 + t$$

så

$$e^{3/100} \approx 1 + \frac{3}{100} = \frac{103}{100}.$$

Svar Ekvationen har två reella lösningar $x = \pm e^{3/100} \approx \pm\frac{103}{100} = \pm 1.03$.

---

(9) Bevisa att det finns oändligt många primtal.

Lösning. Se kurslitteraturen, Gottlieb, *Aritmetik*, sidan 11.
