



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Tisdagen den 21 februari, 2012

1. a) Ange (den största möjliga) definitionsmängden D till funktionen

$$f(x, y) = \ln y + \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}. \quad (2 \text{ p})$$

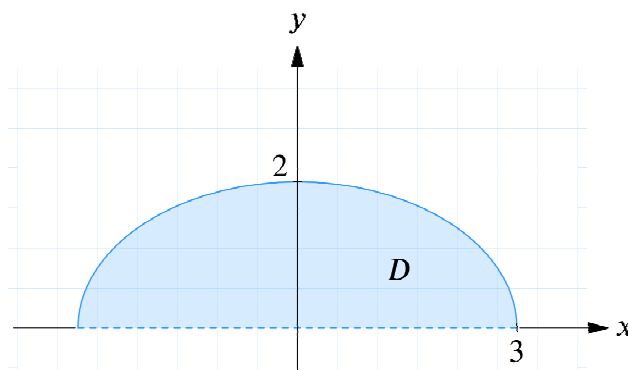
- b) Rita upp området D i en figur. (1 p)
c) Är D en kompakt mängd? (1 p)

Lösningförslag

a. Logaritm-funktionen är bara definierad för positiva tal, så för att $\ln y$ ska vara definierat krävs att $y > 0$. Kvadratroten är bara definierad för icke-negativa tal vilket betyder att $1 - x^2/9 - y^2/4 \geq 0$ krävs, vilket är samma sak som $x^2/9 + y^2/4 \leq 1$. Med andra ord är definitionsmängd för funktionen f :

$$D = \{(x, y) : y > 0 \text{ och } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$$

- b.



c. Randen till D består av två delar, övre halvan av ellipskurvan (som tillhör mängden D) samt en bit av x -axeln (som inte tillhör D). Eftersom alla randpunkter inte tillhör D så är D inte sluten och därför inte heller kompakt.

2. Låt $f(x, y) = \arctan(x + y) + e^{xy}$.

- a) I vilken riktning, sett från punkten $(1, 0)$, växer funktionen f snabbast? (2 p)
b) Bestäm riktningsderivatan av f i denna riktning. (2 p)

Lösningförslag

a. Funktionen växer snabbast i den riktning som ges av gradienten. Vi deriverar och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + xe^{xy}$$

Vi ser att $\text{grad}f(1, 0) = (1/2, 3/2)$ som alltså är den riktning i vilken f växer snabbast i punkten $(1, 0)$.

b. Riktningsderivatan i punkten $(1, 0)$ av f i gradientens riktning är $|\text{grad}f(1, 0)| = |(1/2, 3/2)| = 5/2$.

3. Givet ytan $xy^3 + y + 2xz = 1$.

- a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(2, -1, 1)$. (2 p)
b) Bestäm en linje i parameterform som tangerar ytan i punkten $(2, -1, 1)$. (2 p)

Lösningförslag

a. Låt $g(x, y, z) = xy^3 + y + 2xz - 1$. Då kan vi betrakta ytan som en nivåyta till funktionen g , närmare bestämt som nivåytan $g(x, y, z) = 0$. Gradienten till g är ortogonal mot nivåytan, så för att få fram en ekvation för tangentplanet ska vi börja med att ta fram $\text{grad}g$. Vi deriverar och får:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^3 + 2z, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 3xy^2 + 1, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2x.$$

I punkten $(2, -1, 1)$ får vi $\text{grad}g = (1, 7, 4)$ som alltså är normalvektor till vårt tangentplan. Tangentplanets ekvation blir därför

$$(1, 7, 4) \cdot (x - 2, y + 1, z - 1) = 0$$

vilket är ekvivalent med $x + 7y + 4z + 1 = 0$.

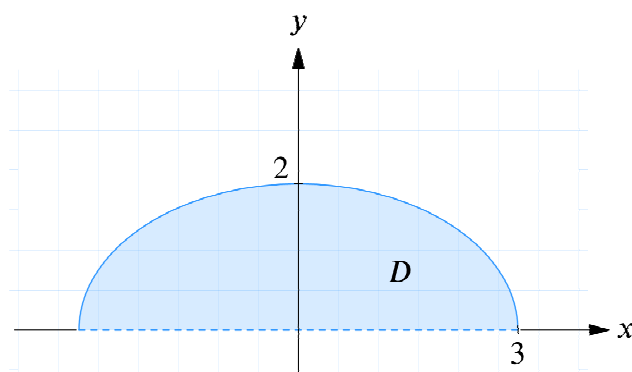
b. I uppgift a tog vi fram ekvationen för tangentplanet till ytan. Nu söker vi en linje som ligger i det tangentplanet. Vi vet att punkten $(2, -1, 1)$ ligger på tangentplanet. Som riktningvektor för vår linje kan vi ta vilken vektor som helst som är ortogonal mot tangentplanetets normalvektor $(1, 7, 4)$. Till exempel kan vi ta $(-4, 0, 1)$. Den tangerande linjens ekvation på parameterform blir då:

$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-4, 0, 1), \quad t \in \mathbf{R}$$

Svar:

1. a. $D = \{(x, y) : y > 0 \text{ och } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$.

b.



c. D är inte kompakt.

2. a. $(1/2, 3/2)$

b. $5/2$

3. a. $x + 7y + 4z + 1 = 0$

b. $(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-4, 0, 1), \quad t \in \mathbf{R}.$