KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Tisdagen den 21 februari, 2012

1. a) Ange (den största möjliga) definitionsmängden D till funktionen

$$f(x,y) = \ln y + \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}}. \qquad \textbf{(2 p)}$$

b) Rita upp området D i en figur. **(1 p)**

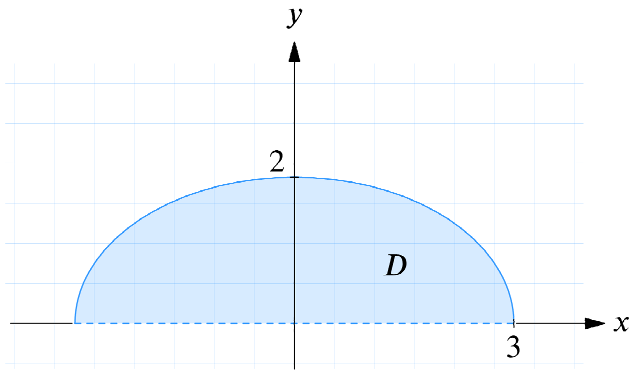
c) Är D en kompakt mängd? **(1 p)**

Lösningsförslag

a. Logaritm-funktionen är bara definierad för positiva tal, så för att $\ln y$ ska vara definierat krävs att $y > 0$. Kvadratroten är bara definierad för icke-negativa tal vilket betyder att $1 - x^2/9 - y^2/4 \geq 0$ krävs, vilket är samma sak som $x^2/9 + y^2/4 \leq 1$. Med andra ord är definitionsmängd för funktionen f:

$$D = \{(x,y) : \ y > 0 \text{ och } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$$

b.



c. Randen till D består av två delar, övre halvan av ellipskurvan (som tillhör mängden D) samt en bit av x-axeln (som inte tillhör D). Eftersom alla randpunkter inte tillhör D så är D inte sluten och därför inte heller kompakt.

2. Låt $f(x, y) = \arctan(x + y) + e^{xy}$.

a) I vilken riktning, sett från punkten $(1, 0)$, växer funktionen f snabbast? **(2 p)**

b) Bestäm riktningsderivatan av f i denna riktning. **(2 p)**

Lösningsförslag

a. Funktionen växer snabbast i den riktning som ges av gradienten. Vi deriverar och får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + ye^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x + y)^2} + xe^{xy}$$

Vi ser att $grad f(1, 0) = (1/2, 3/2)$ som alltså är den riktning i vilken f växer snabbast i punkten $(1, 0)$.

b. Riktningsderivatan i punkten $(1, 0)$ av f i gradientens riktning är $|grad\, f(1, 0)| = |(1/2, 3/2)| = \sqrt{5/2}$.

3. Givet ytan $xy^3 + y + 2xz = 1$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(2, -1, 1)$. **(2 p)**

b) Bestäm en linje i parameterform som tangerar ytan i punkten $(2, -1, 1)$. **(2 p)**

Lösningsförslag

a. Låt $g(x, y, z) = xy^3 + y + 2xz - 1$. Då kan vi betrakta ytan som en nivåyta till funktionen g, närmare bestämt som nivåytan $g(x, y, z) = 0$. Gradienten till g är ortogonal mot nivåytan, så för att få fram en ekvation för tangentplanet ska vi börja med att ta fram $grad\, g$. Vi deriverar och får:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y^3 + 2z, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 3xy^2 + 1, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2x.$$

I punkten $(2, -1, 1)$ får vi $grad\, g = (1, 7, 4)$ som alltså är normalvektor till vårt tangentplan. Tangentplanets ekvation blir därför

$$(1, 7, 4) \cdot (x - 2, y + 1, z - 1) = 0$$

vilket är ekvivalent med $x + 7y + 4z + 1 = 0$.

b. I uppgift a tog vi fram ekvationen för tangentplanet till ytan. Nu söker vi en linje som ligger i det tangentplanet. Vi vet att punkten $(2, -1, 1)$ ligger på tangentplanet. Som riktningsvektor för vår linje kan vi ta vilken vektor som helst som är ortogonal mot tangentplanets normalvektor $(1, 7, 4)$. T ex kan vi ta $(-4, 0, 1)$. Den tangerande linjens ekvation på parameterform blir då:

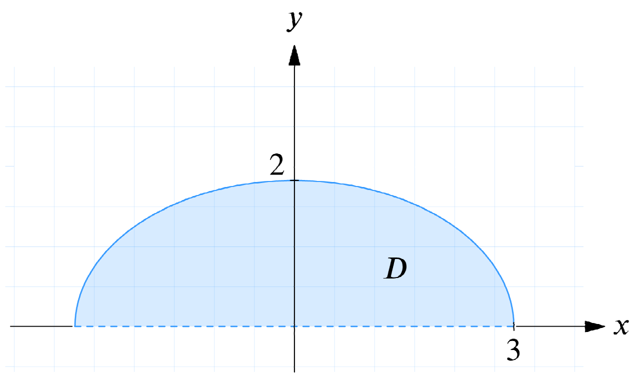
$$(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-4, 0, 1), \quad t \in \mathbf{R}$$

.

Svar:

1. a. $D = \{(x, y) : \ y > 0 \text{ och } \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1\}$.

   b.



   c. D är inte kompakt.

2. a. $(1/2, 3/2)$
   b. $\sqrt{5/2}$

3. a. $x + 7y + 4z + 1 = 0$
   b. $(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(-4, 0, 1), \quad t \in \mathbf{R}$.