KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Modell-Tentamen

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Betrakta funktionen $f(x,y) = (x+2)e^{y^2-1}$.
A) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring punkten $(0,1)$ och använd detta för att beräkna ett närmevärde till $f(-0.1, 0.9)$. **(2)**
B) Bestäm riktningsderivatan av f i punkten $(0,1)$ i riktning mot punkten $(0,0)$. **(1)**
C) Bestäm samtliga riktningar (om det finns några) i vilka riktningsderivatan av f i punkten $(0,1)$ är 0. **(1)**

(2) Beräkna med hjälp av ett lämpligt variabelbyte dubbelintegralen

$$\iint_D (2x+y)\cos(x+2y)\,dxdy,$$

där D ges av olikheterna $0 \leq 2x+y \leq 1$ och $-1 \leq x+2y \leq 1$. **(4)**

(3) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$. **(4)**

DEL B

(4) Beräkna flödet ut genom sfären $x^2+y^2+z^2 = R^2$ av fältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(4)

(5) Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna

$$x^2+y^2-1 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}+1, \quad z \geq 0.$$

(4)

(6) Betrakta kurvan med ekvation $2x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1$. Bestäm minsta avståndet till origo från kurvan. **(4)**

DEL C

(7) Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2}$$

existerar. Om det existerar, beräkna det! **(4)**

(8) Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

då γ är cirkeln $x^2+2x+y^2+2y-1=0$ genomlöpt ett varv i positiv led med startpunkt och slutpunkt i $(-1,0)$. **(4)**

(9) Funktionen $z=z(x,y)$ är av klass C^3 i hela $\mathbb{R}^2$ och uppfyller ekvationen

$$z^3+z(y^2+1)+x^3-3x+y^2-8=0.$$

Bestäm alla lokala extrempunkter till z. **(4)**