Dagens tema

Beräkning av egenvärden och egenvektorer
(Kap 7.2 – 7.3)

Definition 7.1.1. (sid 300)

Låt A vara en $n \times n$-matris. De vektorer $\vec{v} \neq \vec{0}$ för vilka

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

för någon konstant λ, kallas *egenvektorer* till A. Konstanten λ är motsvarande *egenvärde*.

Sats 7.2.1. (sid. 308)

Egenvärdena bestäms av den *karakteristiska ekvationen*:

$$p(\lambda) = \det (A - \lambda I_n) = 0,$$

eller utskrivet:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Det karakteristiska polynomet $p(\lambda)$ är ett polynom av grad n.

Det har alltid formen

$$p(\lambda) = (-\lambda)^n + \mathrm{tr}(A)\,(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det(A)$$

där

$$\mathrm{tr}(A) = \text{summan av diagonalelementen i } A.$$

Den summan kallas A:s *spår*, eng: *trace*. (Sats 7.2.5, sid. 311.)

Speciellt för 2 × 2-matriser:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\,\lambda + \det(A).$$

Allmänt om polynom

- (Faktorsatsen)

  λ_0 är ett nollställe till polynomet $p(\lambda)$

  $$\Leftrightarrow$$

  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\cdot q(\lambda)$, för något polynom $q(\lambda)$,

  dvs. divisionen $\frac{p(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)}$ ”går jämnt ut”.

- (Multipelrötter, algebraisk multiplicitet, def. 7.2.6, sid 312)

  Om

  $$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m\cdot q(\lambda),$$

  för något polynom $q(\lambda)$ med $q(\lambda_0) \neq 0$,

  så säger man att λ_0 är ett *m-faldigt* nollställe, (multipelt nollställe om $m \geq 2$, enkelt nollställe om $m = 1$, dubbelt om $m = 2$, …)

  (Exempel: För $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2$ är 0 ett enkelt nollställe och 1 ett dubbelt.)

- (Algebrans fundamentalsats)

  Varje polynom av grad n har exakt n st. (eventuellt komplexa) nollställen om dessa räknas med sina respektive multipliciteter.

  (Exempel: För $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2$ har tre nollställen, det enkla 0 och det dubbla 1.)

Egenvektorerna som hör till egenvärdet λ_0 bestäms t.ex. med Gauss-Jordan förfarandet, ur systemet

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = 0,$$

som alltid har oändligt många lösningar, (systemdeterminanten är ju = 0!).

Dvs. mängden av egenvektorer som hör till egenvärdet λ_0 är identisk med kärnan

$$\ker (A - \lambda_0 I_n),$$

och är därmed ett *delrum* av $\boldsymbol{R}^n$, (kallas också λ_0:s *egenrum*).

Ett egenvärdes *geometriska* multiplicitet = dimensionen på motsvarande egenrum. (Def 7.3.2, sid 322.)
Generellt gäller att den geometriska multipliciteten ≤ den algebraiska multipliciteten. (Sats 7.3.7, sid 326)

Väderspådom

Roslagsgubben h’Österman har en egen tumregel för hur vädret blir i morgon:

Om det är vackert väder idag, så blir vädret vackert i 4 fall av 5. Om det är dåligt idag (och i h’Östermans värld kan vädret bara vara vackert eller dåligt), så blir vädret dåligt i morgon i 3 fall av 4.

Om man till punkt och pricka följer h’Östermans regel, vilken är då sannolikheten för att vädret är vackert till Valborg om vi har vackert väder idag?