Dagens tema

Diagonalisering av matriser
(Kap 7.4)

Repetition om basbyten i R^n

Låt $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ och $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ vara två baser i R^n ("gamla" och "nya") basen). Sambandet dem emellan kan beskrivas av en matris S där *kolonnerna* i tur och ordning utgörs av *koordinaterna* för de nya basvektorerna med avseende på det gamla systemet:

$$[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]\, S$$

- Om en linjär avbildning vektor $\vec{v}$ har koordinaterna $[v]_e$ och $[v]_f$ i respektive system, så gäller att

$$[v]_e = [v]_f\, S$$

eller ekvivalent:

$$[v]_e\, S^{-1} = [v]_f$$

- Om en avbildning T har matriserna A_e och A_f i respektive system, så gäller att

$$A_f = S^{-1} A_e S$$

Om diagonalisering av $n \times n$-matriser

Definition: En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris S sådan att

$$S^{-1}AS$$

är diagonal. (Sid. 333)

- Matrisen A är diagonaliserbar

  om och endast om

  A har n egenvektorer, som bildar en bas i rummet. (Sats 7.4.3a, sid 333.)

- Om A är diagonaliserbar och S är en matris vars kolonner består av ovannnämnda egenvektorer, så är

  $$S^{-1}AS$$

  en diagonal matris. Diagonalelementen utgörs av motsvarande egenvärden. (Sats 7.4.4c, sid 334.)

- Om A har n st *olika* reella egenvärden så är A diagonaliserbar. (Sats 7.4.3b, sid. 333.)

- Om A har n st reella egenvärden som inte alla är olika, så kan – men behöver inte – A vara diagonaliserbar. (Jmfr exempel 3, sid 335.)