KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-03-13

DEL A

(1) Betrakta funktionen $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$.
A) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(x_0,\, y_0,\, z_0) = (2,\, 1,\, 5)$. **(2)**
B) Avgör om det finns någon punkt på funktionsytan $z = f(x, y)$ i vilken tangentplanet är parallellt med planet $8x + 12y + z = 4$. **(2)**

Lösning. A. Vi observerar först att $f(2, 1) = 5$. Vi deriverar sedan och får

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 8 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -6.$$

Därför blir ekvationen för tangentplanet:

$$z = 5 + 8(x - 2) - 6(y - 1),$$

vilket också kan skrivas $8x - 6y - z = 5$.

B. Normalen till planet $8x + 12y + z = 4$ är $(8, 12, 1)$. Frågan är nu om det finns någon punkt på funktionsytan $z = f(x, y)$ där normalen är parallell med $(8, 12, 1)$. Funktionsytan normal ges av $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, -1)$ och parallellitet föreligger då $(8, 12, 1) = k(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, -1)$, för någon konstant k. Vi ser i tredje koordinaten att detta k måste vara -1. I de övriga koordinaterna får vi då kraven att $\partial f/\partial x = -8$ och $\partial f/\partial y = -12$. Eftersom $\partial f/\partial x = 4x$ och $\partial f/\partial y = -6y$ ser vi att detta är uppfyllt om $x = -2$ och $y = 2$. Alltså: i punkten $(-2, 2, -4)$ är funktionsytans tangentplan parallellt med det givna planet. $\square$

Svar: Svar: A. $8x - 6y - z = 5$. B. $(-2, 2, -4)$.

(2) Låt D vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D x^2 y \, dxdy.$$

(4)

Lösning. Vi kan beräkna integralen med hjälp av upprepad enkelintegration, där vi kan välja i vilken riktning vi vill integrera först. Låt oss välja att ta y-integralen innerst. För varje x mellan -1 och 1 ska då y gå från 0 till x^2 och vi får:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y \, dxdy &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} x^2 y \, dydx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2 y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{x^6}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

□

Svar: $1/7$

(3) Kroppen K begränsas av paraboloidytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 2 - x^2 - y^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

(4)

Lösning. Skärningen mellan de båda paraboloidytorna inträffar då $x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2$, dvs då $x^2 + y^2 = 1$. Det betyder att för (x, y) inom enhetscirkeln D så ska z gå från $x^2 + y^2$ till $2 - x^2 - y^2$ och vi får

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)\,dz\right) dxdy &= \iint_D (x^2 + y^2)(2 - x^2 - y^2 - x^2 - y^2)\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(2 - 2r^2)r\,drd\vartheta \\ &= \frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

där vi i näst sista steget använde polära koordinater, $x = r\cos\vartheta$ och $y = r\sin\vartheta$. □

Svar: $\pi/3$

DEL B

(4) Bestäm de högsta och lägsta punkterna (dvs de punkter som har störst respektive minst z-koordinat) på ytan $z = x^3 + y^2$, när (x, y) ligger i området $3x^2 + 2y^2 \leq 4$. **(4)**

Lösning. Låt $f(x, y) = x^3 + y^2$. Vi ska då hitta största och minsta värde av f på området $3x^2 + 2y^2 \leq 4$. Vi observerar först att området är kompakt (slutet och begränsat) och att f är ett polynom och följaktligen kontinuerlig och differentierbar på det givna området. Därför vet vi att f antar ett största och ett minsta värde, som måste antas i punkter på randen eller i inre kritiska punkter. För att hitta kritiska punkter deriverar vi partiellt och får att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Vi ser att den enda kritiska punkten är $(x, y) = (0, 0)$ där funktionsvärdet är 0. Eftersom f uppenbart antar såväl positiva som negativa värden kan detta varken vara max eller min. Dessa måste alltså antas på randen, dvs då $3x^2 + 2y^2 = 4$. På randen ser vi att $y^2 = 2 - 3x^2/2$ och insättning av detta i funktionen f ger att på randen är $f(x, y) = x^3 + 2 - 3x^2/2 = h(x)$, en funktion av en variabel som vi nu ska undersöka på intervallet $-2/\sqrt{3} \leq x \leq 2/\sqrt{3}$. Eftersom detta intervall är slutet och begränsat och h är kontinuerlig på intervallet så vet vi att h tar ett största och ett minsta värde. Dessa kan antas i kritiska punkter, ändpunkter, eller i punkter där derivata saknas. Vi deriverar och får $h'(x) = 3x^2 - 3x$ som existerar överallt och är noll om och endast om $x = 0$ eller $x = 1$, som ligger i intervallet. Vi jämför nu funktionsvärdena i de punkter vi har funnit:

$$h(0) = 2, \quad h(1) = \frac{3}{2} \quad h(-2/\sqrt{3}) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}, \quad h(2/\sqrt{3}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Vi ser att största värdet är 2 som antas i punkterna $(0,\, \pm\sqrt{2},\, 2)$ och minsta är $-8/3\sqrt{3}$ som antas i punkten $(-2/\sqrt{3},\, 0,\, -8/3\sqrt{3})$.

□

Svar: Högsta punkterna är $(0,\, \pm\sqrt{2},\, 2)$ och lägsta punkten är $(-2/\sqrt{3},\, 0,\, -8/3\sqrt{3})$.

(5) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x,\ -2y,\ -2)$ genom ytan $\mathbf{r}(s, t) = (3s,\ -2t^2,\ 2s+t+1),\ 0 \le s \le 1,\ -1 \le t \le 1$, i den riktning som anges av normalvektorn $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t$. **(4)**

Lösning. Kalla ytan Y. På Y gäller, med den parametrisering som är given, att $\mathbf{F} = (6s,\ 4t^2,\ -2)$. Vi får vidare att $\mathbf{r}'_s = (3, 0, 2)$ och $\mathbf{r}'_t = (0, -4t, 1)$. Vi låter D beteckna området $0 \le s \le 1,\ -1 \le t \le 1$ och får flödet Φ genom:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS \\
&= \iint_D (6s, 4t^2, -2)\cdot[(3, 0, 2) \times (0, -4t, 1)]\, dsdt \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (48st - 12t^2 + 24t)\, dt \right) ds \\
&= -8.
\end{aligned}$$

$\square$

Svar: -8.

(6) Avgör om funktionen $f(x, y, z) = 2 + 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz$ har en lokal maxpunkt

A) i origo **(2)**

B) i punkten $(1, 1, 1)$ **(2)**

Lösning. A. Eftersom f är ett polynom i x, y, och z så är f sitt eget Taylorpolynom i origo. Vi ser att alla partiella derivator av f är noll i origo. Den kvadratiska formen undersöker vi med kvadratkomplettering och vi får

$$2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 6xz - 2yz = 2[(x - \frac{y}{2} + \frac{3z}{2})^2 + (\frac{y}{2} + \frac{z}{2})^2 - \frac{1}{2}z^2].$$

Vi ser att den kvadratiska formen är indefinit och vi har alltså en sadelpunkt, vilket inte är en lokal maxpunkt.

B. Vi har $\partial f/\partial x = 4x - 2y + 6z$ och alltså $\partial f/\partial x(1, 1, 1) = 8 \neq 0$. Eftersom f är difrerentierbar och inte alla partiella derivator är noll i punkten så är $(1, 1, 1)$ inte en lokal maxpunkt för f.

□

Svar: A. Nej. B. Nej.

DEL C

(7) Enligt Coulombs lag ges det elektrostatiska fältet $\mathbf{E}$ kring en enhetsladdning i origo av

$$\mathbf{E} = k\frac{(x,\, y,\, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

där k är en konstant.
A. Visa att fältet är konservativt genom att bestämma en potential. **(2)**
B. Beräkna det arbete kraftfältet $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ uträttar vid förflyttning av en punktladdning q ett varv längs den slutna kurvan $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$, medurs sett från origo. **(2)**

Lösning. A. En eventuell potential U ska uppfylla att $\nabla U = \mathbf{E}$. Speciellt gäller då att $\partial U/\partial x = kx/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ vilket gör att vi måste ha

$$U(x, y, z) = -k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + g(y, z)$$

för någon funktion g. Vidare måste

$$\partial U/\partial y = ky/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \text{ och } \partial U/\partial z = kz/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

vilket är uppfyllt om vi tar $g(y, z) = 0$. Vi har alltså en potential

$$U(x, y, z) = -k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

definierad överallt utom i origo.

B. Eftersom fältet är konservativt och kurvan sluten är arbetet 0. $\square$

Svar: A. potential $U(x, y, z) = -k(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ B. 0

(8) Betrakta ekvationen $x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4 = 4$.
A. Visa att ekvationen i en omgivning av punkten $(1,\ 1,\ 1)$ implicit definierar en C^1 funktion $z = z(x, y)$. **(1)**
B. I vilken riktning från punkten $(1,\ 1)$ växer $z(x, y)$ snabbast? **(3)**

Lösning. A. Sätt $F(x, y, z) = x^2+2xz+y^3-yz+z^4-4$. Då är F C^1 överallt (polynom). Och eftersom $\partial F/\partial z\,(1, 1, 1) = 5 \neq 0$ så följer av implicita funktionssatsen att $F = 0$ i en omgivning av $(1, 1, 1)$ implicit definierar en C^1 funktion $z = z(x, y)$.

B. Vi kan nu derivera ekvationen $x^2 + 2xz + y^3 - yz + z^4 = 4$ implicit. Först deriverar vi m a p x och vi får då $2x + 2z + 2xz'_x - yz'_x + 4z^3z'_x = 0$, vilket när $x = y = z = 1$ ger $2 + 2 + 2z'_x - z'_x + 4z'_x = 0$ dvs $z'_x(1, 1) = -4/5$. Sedan deriverar vi m a p y och får $2xz'_y + 3y^2 - z - yz'_y + 4z^3z'_y = 0$, vilket när $x = y = z = 1$ ger att $z'_y = -2/5$. Eftersom funktionen $z = z(x, y)$ växer snabbast när (x, y) ändras i gradientens riktning så växer z snabbast i punkten $(1, 1)$ i den riktning som anges av $(-4/5, -2/5)$.

$\square$

Svar: A. Se lösningen. B. I den riktning som anges av $(-4/5, -2/5)$.

(9) En läskeblaskburk i form av en rät cirkulär cylinder utan lock, med höjd h och radie R, innehåller så mycket vätska att när man lutar burken precis så att vätskan börjar rinna ut så skymmer vätskan exakt halva bottenarean. Beräkna volymen av vätskan i burken. **(4)**

Lösning. Vi inför koordinater så att x-axeln är burkens centralaxel och bottenytan utgörs av området där $x = 0$ och $y^2 + z^2 \leq R^2$. Vi kan då tänka oss att vätskan skymmer undre halvan av denna cirkelskiva med radie R när den precis börjar rinna ut vid punkten $(h, 0, -R)$. Det vill säga: den sökta volymen av vätskan kan beskrivas som volymen av den kropp K som ges av olikheterna $y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \leq 0$ och $0 \leq x \leq -hz/R$. Låt D vara den mängd i yz-planet som uppfyller olikheterna $y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \leq 0$. Vi får får då den sökta volymen V som

$$\begin{aligned} V = \iiint_K dxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{-hz/R} dx \right) dydz \\ &= \iint_D -\frac{hz}{R}\, dydz \\ &= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^0 -\sin\varphi \frac{hr^2}{R}\, d\varphi \right) dr \\ &= 2\int_0^R \frac{hr^2}{R}\, dr \\ &= \frac{2hR^2}{3}, \end{aligned}$$

där vi vid övergången från rad 2 till rad 3 införde polära koordinater i yz-planet, dvs satte $y = r\cos\varphi$ och $z = r\sin\varphi$, med jacobideterminant r och gränser $-\pi \leq \varphi \leq 0$ och $0 \leq r \leq R$.

□

Svar: $\dfrac{2hR^2}{3}$.