P.4.6 (sid. 32, Adam's Ed. 7)

Bestäm definitionsmängd D_g och värdemängd V_g till funktionen $g(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x-2}}$.

Lösning:

D_g: Vi har begränsningarna $x-2\geq 0$ dvs. $x\geq 2$ <u>och</u> $1-\sqrt{x-2}\neq 0$
(vilket för $x\geq 2$ inträffar om $x\neq 3$).
Sålunda, $D_g=\{x\in R; x\geq 2 \text{ och } x\neq 3\}=[2,3)\cup(3,+\infty)$

V_g: $y=g(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x-2}}$

Vi ser först att $y\neq 0$ måste gälla (ty täljaren 1 kan aldrig bli noll)

Då, $y=\frac{1}{1-\sqrt{x-2}}\Leftrightarrow\frac{1}{y}=1-\sqrt{x-2}\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=1-\frac{1}{y}\geq 0$ (ty definitionsmässigt är en kvadratrot av ett reellt tal ickenegativ).

Vi studerar nu olikheten $1-\frac{1}{y}\geq 0$ litet närmare (, två fall).

Fall 1: $y<0$.

Vi får: $y(1-\frac{1}{y})=y-1\leq 0$ (OBS: Olikhetstecknet vänt eftersom $y<0$)

Då, $y\leq 1$ dvs. ett svagare villkor än $y<0$ dvs. $y<0$ kvarstår.

Fall 2: $y>0$.

$y(1-\frac{1}{y})=y-1\geq 0$

Då, $y\geq 1$ dvs. ett starkare villkor än $y>0$ dvs. $y\geq 1$ skall gälla.

Fall 1 och Fall 2 ger nu,

$V_g=\{y\in R; y<0 \text{ eller } y\geq 1\}=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

(För $y\in V_g=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ gäller $x=2+(1-\frac{1}{y})^2$ dvs. $g(2+(1-\frac{1}{y})^2)=y$)

<u>Svar:</u> Definitionsmängden är $[2,3)\cup(3,+\infty)$ och värdemängden är $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

Tips: Plotta gärna funktionen $y=g(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x-2}}$ i *Mathematica* för att ytterligare belysa resultatet.