KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2
Tisdagen den 10 april 2012

(1) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

där D är den cirkelsektor som beskrivs av olikheterna $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$ och $x+y \geq 0$.

(4 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi byter till polära koordinater, $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, där $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq \varphi \leq 3\pi/4$, och får

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{3\pi/4} \sqrt{1-r^2}r\,d\varphi \right) dr \\
&= \frac{3\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{1-r^2}r\,dr \\
&= \frac{3\pi}{4} \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} \right]_0^1 dr \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(2) Låt $f(x, y) = y^3 - x^2 - 7y^2 + 2xy + 9y$.

A. Bestäm de kritiska (stationära) punkterna till f. **(1 p)**

B. Bestäm, för var och en av de kritiska punkterna från uppgift A, Taylorpolyomet av grad 2 till f kring punkten. **(2 p)**

C. Avgör de kritiska punkternas karaktär (lokalt min/lokalt max/sadel). **(1 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi deriverar partiellt och får $\partial f/\partial x = -2x + 2y$ och $\partial f/\partial y = 3y^2 - 14y + 2x + 9$. Kritiska punkter fås då samtliga partiella derivator är noll. Att $\partial f/\partial x = 0$ är ekvivalent med att $y = x$ och insättning av detta i $\partial f/\partial y = 3y^2 - 14y + 2x + 9 = 0$ ger $3x^2 - 12x + 9 = 0$ med lösningar $x = 1$ och $x = 3$. Vi får alltså två kritiska punkter, dvs $(1, 1)$ och $(3, 3)$.

För att bestämma karaktären på de kritiska punkterna ska vi ta med andra ordningens termer i Taylorutvecklingen av f kring de båda punkterna. Vi får $\partial^2 f \partial x^2 = -2$, $\partial^2 f \partial x \partial y = 2$, $\partial^2 f \partial y^2 = 6y - 14$.

Kring $(1, 1)$ har f andra gradens Taylorpolynom:

$$p_{1,1}(x, y) = 4 + \frac{1}{2}(-2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - 8(y-1)^2),$$

där andragradstermerna avgör karaktären. Dvs med $x - 1 = h$ och $y - 1 = k$ ska vi studera $Q(h, k) = -2h^2 + 4hk - 8k^2$. Med hjälp av kvadratkomplettering ser vi att $Q(h, k) = -2((h - k)^2 + 3k^2)$ vilket är en negativt definit kvadratisk form - alltså är punkten $(1, 1)$ en lokal maxpunkt.

Kring $(3, 3)$ har f andra gradens Taylorpolynom:

$$p_{3,3}(x, y) = \frac{1}{2}(-2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 4(y-1)^2),$$

där andragradstermerna avgör karaktären. Dvs med $x - 1 = h$ och $y - 1 = k$ ska vi i detta fall studera $Q(h, k) = -2h^2 + 4hk + 4k^2$. Med hjälp av kvadratkomplettering ser vi att $Q(h, k) = -2((h - k)^2 - 3k^2)$ vilket är en indefinit kvadratisk form - alltså är punkten $(1, 1)$ en sadelpunkt.

Funktionen f har alltså exakt en lokal extrempunkt, en lokal maxpunkt i $(1, 1)$.

(3) Inom nationalekonomi används ibland en funktion av typen

$$F(L, K) = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

för att beskriva hur produktionen F beror på arbete, L, och kapital, K. Funktionen kallas Cobb-Douglas produktionsfunktion och A, α och β är konstanter. Anta att $\alpha = \beta = 1/2$ och att proportionalitetskonstanten $A = 1$. Anta vidare att budgetbegränsningar tillsammans kostnader för arbete och kapital gör att K och L, förutom att vara icke-negativa, också måste uppfylla villkoret $45L + 15K = 270$. Bestäm de värden på K och L som maximerar produktionen under dessa betingelser. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi ska maximera $F(L, K) = L^{1/2}K^{1/2}$ under bivillkoret $G(L, K) = 45L + 15K = 270$, där $L, K \geq 0$. Eftersom F är kontinuerlig på den kompakta mängd som (L, K) varierar i måste F anta ett största värde. Detta kan antas antingen i någon av linjesegmentets ändpunkter $(0, 18)$ och $(6, 0)$ eller i någon punkt där $L > 0$ och $K > 0$ och bivillkoret är uppfyllt. I en sådan optimal punkt måste ∇F och ∇G vara parallella, enligt Lagranges sats, eftersom F och G båda är C^1. Detta villkor ger att

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}L^{-1/2}K^{1/2} \\ \frac{1}{2}L^{1/2}K^{-1/2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 45 \\ 15 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $\lambda = \sqrt{K/L}/90 = \sqrt{L/K}/30$ som medför att $K^2 = 9L^2$ och därmed $K = 3L$, eftersom båda är positiva. Insättning av detta i bivillkoret ger nu att $L = 3$ och alltså också att $K = 9$. Vi jämför värdena i de aktuella punkterna och ser att den maximala produktionen är $F(3, 9) = 3^{1/2}9^{1/2} = 3\sqrt{3}$. De värden på L och K som maximerar produktionen är alltså $L = 3$ och $K = 9$.

Svar:

(1) $\pi/4$

(2) A. $(1, 1)$ och $(3, 3)$

B. $p_{1,1}(x, y) = 4 + \frac{1}{2}(-2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) - 8(y-1)^2)$, och

$p_{3,3}(x, y) = \frac{1}{2}(-2(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 4(y-1)^2)$.

C. $(1, 1)$ är en lokal maxpunkt och $(3, 3)$ är en sadelpunkt.

(3) $L = 3$ och $K = 9$.