KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Kontrollskrivning 1
Onsdagen den 11 april 2012

Skrivtid: 08:15-09:45 Tillåtna hjälpmedel: inga Examinator: Lars Filipsson

Kontrollskrivningen bedöms med upp till 12 poäng. För att resultatet skall kunna tillgodoräknas på tentamen krävs minst 7 poäng, vilket ger 3 poäng på uppgift 1 på tentamen. För att få 4 poäng på uppgift 1 krävs minst 9 poäng.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

1. Låt $g(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$.

   A. Ange en ekvation för den nivåyta till g som innehåller punkten $(1, 3, 2)$. **(1 p)**

   B. Ange en enhetsvektor (dvs en vektor med längd 1) som i punkten $(1, 3, 2)$ är ortogonal mot nivåytan i uppgift A. **(1 p)**

   C. Låt ℓ vara normallinjen genom punkten $(1, 3, 2)$ till nivåytan i uppgift A (dvs den linje som är ortogonal mot ytan). Avgör om ℓ skär x-axeln. **(2 p)**

2. En rund platta P beskrivs i ett koordinatsystem som

$$P = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

   Temperaturen i en punkt (x, y) på plattan antas given av $T(x, y) = 20 + 30e^{2-x^2-y^2}$.
   A. Låt $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Bestäm $T'_{\mathbf{v}}(1, -1)$, dvs riktningsderivatan av T i punkten $(1, -1)$ i den riktning som anges av $\mathbf{v}$. **(2 p)**

   B. I vilken riktning från punkten $(1, -1)$ ökar temperaturen snabbast? **(2 p)**

3. Cobb-Douglas produktionsfunktion, given av $F(L, K) = AL^\alpha K^\beta$, används ibland i nationalekonomi för att beskriva hur produktionen F beror på arbete L och kapital K. Anta att för konstanterna A, α och β gäller att $A = 1$, $\alpha = 3/4$ och $\beta = 1/4$.
   A. Beräkna de partiella derivatorna $\partial F/\partial L$ och $\partial F/\partial K$. **(1 p)**

   B. Om L och K varierar med tiden t så beskriver den sammansatta funktionen g, given av $g(t) = F(L(t), K(t))$, hur produktionen varierar med tiden. Ange med hjälp av kedjeregeln ett uttryck som beskriver den momentana förändringstakten av F vid tiden t.
   (1 p)

C. Anta att vid en viss tidpunkt t_0 gäller att $L(t_0) = 1000$ och $K(t_0) = 2000$, i lämpliga enheter. Anta också att $L'(t_0) = 10$ och $K'(t_0) = -20$. Bestäm den momentana förändringstakten av produktionen vid tidpunkten t_0. Ökar eller minskar produktionen vid denna tidpunkt?

(2 p)