KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till Kontrollskrivning 1
Onsdagen den 11 april 2012

(1) Låt $g(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$.
A. Ange en ekvation för den nivåyta till g som innehåller punkten $(1, 3, 2)$. **(1 p)**

B. Ange en enhetsvektor (dvs en vektor med längd 1) som i punkten $(1, 3, 2)$ är ortogonal mot nivåytan i uppgift A. **(1 p)**

C. Låt ℓ vara normallinjen genom punkten $(1, 3, 2)$ till nivåytan i uppgift A (dvs den linje som är ortogonal mot ytan). Avgör om ℓ skär x-axeln. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

A. Eftersom $g(1, 3, 2) = 13$ är den sökta ekvationen $x(y^2 + z^2) = 13$.

B. Gradienten är ortogonal mot nivåytan. Vi deriverar och får

$$\partial g/\partial x = y^2 + z^2, \quad \partial g/\partial y = 2xy \quad \partial g/\partial z = 2xz,$$

vilket ger att gradienten i den aktuella punkten blir $(13, 6, 4)$. Denna vektor har längd $\sqrt{221}$ så den sökta enhetsvektorn ortogonal mot ytan i punkten blir: $\frac{1}{\sqrt{221}}(13, 6, 4)$.

C. En ekvation för den aktuella normallinjen på parameterform är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

och vi ser att valet $t = -1/2$ ger $y = z = 0$, dvs en punkt på x-axeln. Svar ja alltså.

(2) En rund platta P beskrivs i ett koordinatsystem som

$$P = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Temperaturen i en punkt (x, y) på plattan antas given av $T(x, y) = 20 + 30e^{2-x^2-y^2}$.
A. Låt $\mathbf{v} = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Bestäm $T'_{\mathbf{v}}(1, -1)$, dvs riktningsderivatan av T i punkten $(1, -1)$ i den riktning som anges av $\mathbf{v}$. **(2 p)**

B. I vilken riktning från punkten $(1, -1)$ ökar temperaturen snabbast? **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

A. Vi deriverar och får $\nabla T = (-60xe^{2-x^2-y^2}, -60ye^{2-x^2-y^2})$ vilket i den aktuella punkten ger oss gradienten $\nabla T(1, -1) = (-60, 60)$. Vi får nu

$$T'_{\mathbf{v}}(1, -1) = (-60, 60)\cdot(1/2, \sqrt{3}/2 = -30 + 30\sqrt{3}.$$

B. Funktionen ökar snabbast i den riktning som gradienten anger, vilket i det här fallet betyder i riktningen $(-60, 60)$ vilket är detsamma som i riktningen $(-1, 1)$ dvs in mot origo.

(3) Cobb-Douglas produktionsfunktion, given av $F(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}$, används ibland i nationalekonomi för att beskriva hur produktionen F beror på arbete L och kapital K. Anta att för konstanterna A, α och β gäller att $A = 1$, $\alpha = 3/4$ och $\beta = 1/4$.

A. Beräkna de partiella derivatorna $\partial F/\partial L$ och $\partial F/\partial K$. **(1 p)**

B. Om L och K varierar med tiden t så beskriver den sammansatta funktionen g, given av $g(t) = F(L(t), K(t))$, hur produktionen varierar med tiden. Ange med hjälp av kedjeregeln ett uttryck som beskriver den momentana förändringstakten av F vid tiden t. **(1 p)**

C. Anta att vid en viss tidpunkt t_0 gäller att $L(t_0) = 1000$ och $K(t_0) = 2000$, i lämpliga enheter. Anta också att $L'(t_0) = 10$ och $K'(t_0) = -20$. Bestäm den momentana förändringstakten av produktionen vid tidpunkten t_0. Ökar eller minskar produktionen vid denna tidpunkt? **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

A. Vi har $F(L,K) = L^{3/4}K^{1/4}$. Vi deriverar och får

$$\partial F/\partial L = \frac{3}{4}L^{-1/4}K^{1/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/4}$$

och

$$\partial F/\partial K = \frac{1}{4}L^{3/4}K^{-3/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{L}{K}\right)^{3/4}$$

B. Vi använder kedjeregeln och får

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt}.$$

C. Vi använder uttrycket från uppgift B, där vi sätter in de aktuella värdena på variablerna, och får att

$$\begin{aligned} g'(t_0) &= \frac{3}{4}\left(\frac{2000}{1000}\right)^{1/4}\cdot 10 + \frac{1}{4}\left(\frac{1000}{2000}\right)^{3/4}\cdot(-20) \\ &= \frac{30\cdot 2^{1/4}}{4} - \frac{5}{2^{3/4}} > 0, \end{aligned}$$

vilket betyder att produktionen ökar vid den aktuella tidpunkten.

Svar:

(1) A. $x(y^2+z^2) = 13$. B. $\frac{1}{\sqrt{221}}(13,6,4)$. C. Ja.

(2) A. $-30 + 30\sqrt{3}$. B. $(-1,1)$

(3) A. $\partial F/\partial L = \frac{3}{4}L^{-1/4}K^{1/4} = \frac{3}{4}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/4}$ och $\partial F/\partial K = \frac{1}{4}L^{3/4}K^{-3/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{L}{K}\right)^{3/4}$

B. $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F}{\partial L}\frac{dL}{dt} + \frac{\partial F}{\partial K}\frac{dK}{dt}$. C. $\frac{30\cdot 2^{1/4}}{4} - \frac{5}{2^{3/4}}$. Produktionen ökar.