KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till Kontrollskrivning 2
Onsdagen den 2 maj 2012

(1) Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

där $D = \{(x, y) \colon\ 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \text{ och } y \ge 0\}$. **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Vi byter till polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, där $2 \le r \le 3$ och $0 \le \varphi \le \pi$, och får

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^\pi \left(\int_2^3 \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r^2}\,r\,dr\right)d\varphi \\ &= \int_0^\pi \left(\int_2^3 (\cos\varphi + \sin\varphi)\,dr\right)d\varphi \\ &= 2.\end{aligned}$$

(2) Låt $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Hur många lokala extrempunkter (lokala max/min) har funktionen f? **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Funktionen f är ett polynom och alltså C^∞ överallt, vilket betyder att eventuella lokala extrempunkter måste vara kritiska punkter. Vi deriverar partiellt och får $\partial f/\partial x = 4x^3 - 4y$ och $\partial f/\partial y = 4y^3 - 4x$. Kritiska punkter fås då samtliga partiella derivator är noll. Att $\partial f/\partial x = 0$ är ekvivalent med att $y = x^3$ och insättning av detta i $\partial f/\partial y = 4y^3 - 4x = 0$ ger $x^9 = x$ med lösningar $x = \pm 1$ och $x = 0$. Vi får alltså tre kritiska punkter, dvs $(1, 1)$, $(-1, -1)$ och $(0, 0)$.

För att bestämma karaktären på de kritiska punkterna ska vi ta med andra ordningens termer i Taylorutvecklingen av f kring de båda punkterna. Vi får $\partial^2 f/\partial x^2 = 12x^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y = -4$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 12y^2$.

Kring $(0,0)$ har f andra gradens Taylorpolynom:

$$p_{0,0}(x,y) = -4xy,$$

vilket betyder att origo är en sadelpunkt (den kvadratiska formen är indefinit).

Kring $(1,1)$ har f andra gradens Taylorpolynom:

$$p_{1,1}(x,y) = -2 + \frac{1}{2}(12(x-1)^2 - 8(x-1)(y-1) + 12(y-1)^2),$$

där andragradstermerna avgör karaktären. Dvs med $x-1 = h$ och $y-1 = k$ ska vi i detta fall studera $Q(h,k) = 12h^2 - 8hk + 12k^2$. Med hjälp av kvadratkomplettering ser vi att $Q(h,k) = 12((h-k/3)^2 + 8k^2/9)$ vilket är en positivt definit kvadratisk form - alltså är punkten $(1,1)$ en lokal minpunkt.

På grund av symmetrin (eller med hjälp av beräkningar) får vi samma slutsats i punkten $(-1,-1)$ som i punkten $(1,1)$.

Funktionen f har alltså exakt två lokala extrempunkter, lokala minpunkter i $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

(3) En komet rör sig längs en bana som i ett ON-koordinatsystem beskrivs av ekvationen $y^2 - x^2 = 1$, med $y \geq 0$. Avgör hur nära kometen kommer punkten $(1,0)$ genom att göra följande:

A. Formulera problemet som ett optimeringsproblem med bivillkor. **(1 p)**

B. Förklara varför man på förhand kan veta att det finns en optimal punkt till problemet i uppgift A. **(1 p)**

C. Lös problemet i uppgift A med hjälp av Lagranges metod och ange hur nära kometen kommer punkten $(1,0)$. **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

A. Avståndet från punkten (x,y) till punkten $(1,0)$ ges av $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Vi ska alltså minimera funktionen $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ under bivillkoret $g(x,y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$. (Om man vill ha enklare räkningar kan man konstatera att rotuttrycket i funktionen f minimeras när det som står under rottecknet minimeras, eftersom rotfunktionen är strängt växande. Används detta kan man alltså formulera problemet så att man ska minimera $h(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x,y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$ – och när man löst detta problem gör man en rotutdragning för att hitta minimum av f.)

B. Punkten $(0,1)$ ligger på hyperbeln och avståndet från denna punkt till $(1,0)$ är exakt $\sqrt{2}$. Det sökta minsta avståndet är alltså högst $\sqrt{2}$. För punkter utanför cirkeln runt $(1,0)$ med radie $\sqrt{2}$ är avståndet större än $\sqrt{2}$. Där kan minimum alltså inte antas. Den del av av kurvan $y^2 - x^2 - 1 = 0$ som ligger i området $(x-1)^2 + y^2 \leq 2$

är en kompakt mängd och funktionen f är kontinuerlig på denna, så därför kan vi på förhand veta att f har ett minsta värde på denna mängd, vilket då också, enligt argumentet ovan, måste vara lösningen på optimeringsproblemet.

C. Det minsta värde vi genom B vet finns måste antas i en punkt där ∇f och ∇g är parallella, enligt Lagranges sats, eftersom f och g båda är C^1 överallt. Eftersom $\nabla g \neq (0, 0)$ överallt på hyperbeln så har vi alltså i en optimal punkt att

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \end{pmatrix},$$

för något tal λ. Ekvationen i andra koordinaten ger att $2\lambda = 1/\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ eller $y = 0$. Eftersom $y = 0$ inte uppfyller bivillkoret är detta uteslutet och $2\lambda = 1/\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ måste gälla. Ekvationen i första koordinaten ger då att $x-1 = -x$ vilket är detsamma som att $x = 1/2$. Insättning av detta i bivillkoret ger då att $y^2 - 1/4 = 1$ (och $y > 0$) dvs $y = \sqrt{5}/2$. Vi har alltså en punkt där ∇f och ∇g är parallella, nämligen $(1/2, \sqrt{5}/2)$ och detta måste då vara vår minpukt. Minsta värdet av f är alltså $f(1/2, \sqrt{5}/2) = \sqrt{1/4 + 5/4} = \sqrt{3/2}$ som är minsta avståndet.

Svar:

(1) 2

(2) Funktionen f har två lokala extrempunkter, lokala minpunkter i $(1, 1)$ och $(-1, -1)$.

(3) A. Minimera $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ under bivillkoret $g(x, y) = y^2 - x^2 - 1 = 0$.
B. Se lösningen.
C. $\sqrt{3/2}$.