Pseudohärledning av Maclaurinutvecklingen av $\ln(1+x)$.

$$\ln(1+x)=\int \tfrac{d}{dx}\ln(1+x)dx=\int \frac{1}{1+x}dx=\int \frac{1}{1-(-x)}dx= \text{[Geometrisk serie]} =$$
$$=\int(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots)dx=\int 1dx-\int xdx+\int x^2dx-\int x^3dx+\int x^4dx-\int x^5dx+\ldots=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots+0=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad \text{(A).}$$

(Vi har valt integrationskonstanten $C=0$ ty $\ln(1+x)=\ln 1=0$ för $x=0$.)
Anmärkning: (A) gäller för alla $-1<x<1$ (ty då är $\ln(1+x)$ definierad och k-värdet ($=(-x)$) i den geometriska serien sådant att $|k|=|-x|<1$).

Uppg. 9.6.11. (sid. 545). Bestäm Maclaurinutvecklingen av $\ln\frac{1+x}{1-x}$. För vilka x gäller den?

Lösning:

Enligt (A) ovan fås,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \text{ för } -1<x<1$$

och

$$\ln(1-x)=\ln(1+(-x))=(-x)-\frac{(-x)^2}{2}+\frac{(-x)^3}{3}-\frac{(-x)^4}{4}+\frac{(-x)^5}{5}-\frac{(-x)^6}{6}+\ldots=$$
$$=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-\ldots=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{för } -1<x<1$$

Då,

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots-(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}-)=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\ldots+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\ldots=$$
$$=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\left(=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) \quad \text{för } -1<x<1$$

Svar: $\ln\frac{1+x}{1-x}=2(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ som gäller för $-1<x<1$