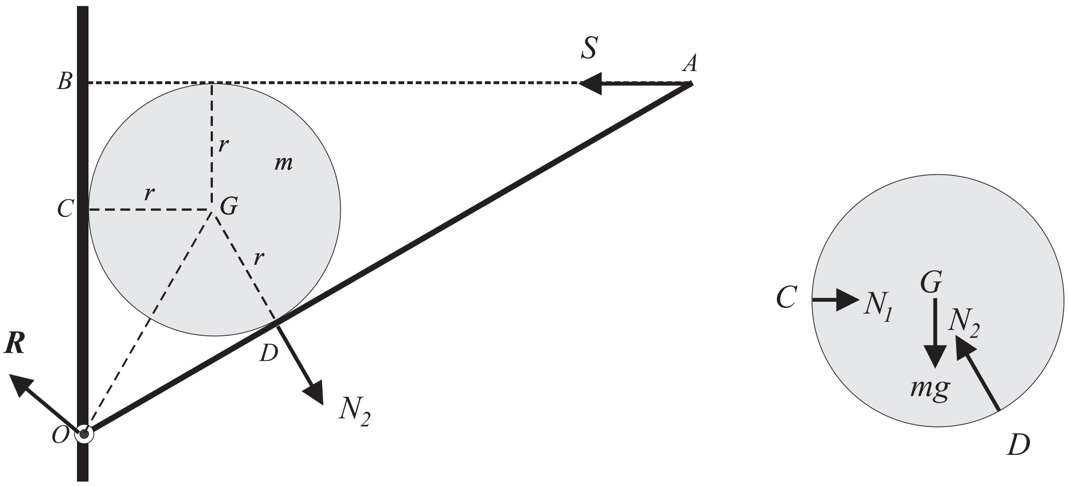
KTH Mekanik **2010 05 28**

Mekanik för I, SG1109, Lösningar till problemtentamen, 2010 05 28

Uppgift 1: En lätt glatt stång OA kan rotera kring en fix glatt led i O. Leden i O sitter på en glatt vertikal vägg. I punkten B, på halva stångens längd rakt över O, är en lätt otänjbar tråd fäst i väggen. Tråden är horisontell och i sin andra ände fäst i stångens ändpunkt A så att stången, tråden och biten OB av väggen bildar en halv liksidig triangel (30-60-90-graders-triangel). En glatt cirkulär skiva med massan m och radien r vilar mot väggen i C och stången i D så att översta punkten är precis under tråden AB. 1) Visa att sträckan OD är $\sqrt{3}\,r$. 2) Beräkna spännkraften i tråden.



Figur 1: Systemet i Uppgift 1. Till vänster har krafterna på den lätta staven OA satts ut. Till höger är den cylindriska plattan frilagd.

Lösning 1: För 1) betraktar man triangeln OGD. Den är också en halv liksidig. Detta betyder att vinkeln vid D är rät och att sträckan $|OG| = 2r$. Pytagoras sats ger då att $|OD|^2 + r^2 = (2r)^2$. Detta medför att $|OD|^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$ vilket ger **Svar:** $|OD| = \sqrt{3}r$.

Nu betraktar vi den frilagda cylinderplattan och får jämviktsekvationerna:

$$N_1 - N_2 \sin(\pi/6) = 0,$$
$$-mg + N_2 \cos(\pi/6) = 0,$$

I horisontell resp. vertikal led. Ur den andra av dessa får man $N_2 = (2/\sqrt{3})\,mg$ vilket behövs i ekvationen för stavens momentjämvikt.

Momentekvationens komponenet vinkelrätt mot planet ger

$$M_O = -|OD|N_2 + |OB|S = 0.$$

Men $|OB| = |OC| + |CB| = |OD| + r = (\sqrt{3} + 1)r$. Då fås jämviktsekvationen för momentet till,

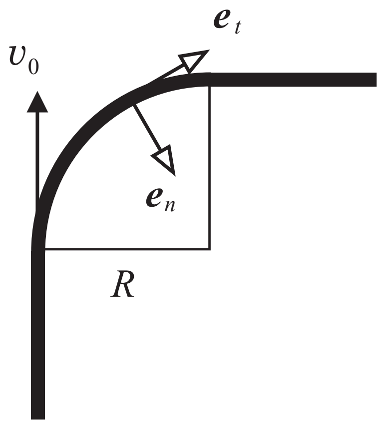
$$-\sqrt{3}r(2/\sqrt{3})\,mg + (\sqrt{3} + 1)rS = 0.$$

S, spännkraften i linan kan lösas ut och man får

Svar: Spännkraften är

$$S = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}\,mg.$$

Uppgift 2: En bil kör in i en 90-graders sväng som har formen av en kvartscirkelbåge med radie R. Bilen har farten v_0 när den kör in i kurvan. Den accelererar med konstant tangentialacceleration $\ddot{s} = a$ genom svängen. Beräkna farten och accelerationens belopp precis i slutet av svängen.



Figur 2: I uppgift 2 inför man naturliga komponenter.

Lösning 2: Lagen om kinetiska energin ger

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad = \quad U_{0-1} = F_t(s_1 - s_0)$$

där T_0 är kinetiska energin i startläget och T_1 är kinetiska energi i slutläget, och s_0 är båglängden i startläget och s_1 är båglängden i slutläget. Vi har att tangentialkomponenten av kraften är $F_t = ma$ och att båglängden längs en kvartscirkel är $s_1 - s_0 = R\pi/2$. Detta ger att

$$v_1^2 = v_0^2 + 2aR\frac{\pi}{2} = v_0^2 + aR\pi.$$

Accelerationen i naturliga komponenter ges av,

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n,$$

så precis i slutet av kurvan fås

$$\boldsymbol{a}_1 = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_t + \frac{v_1^2}{R}\boldsymbol{e}_n = a\,\boldsymbol{e}_t + \frac{v_0^2 + aR\pi}{R}\boldsymbol{e}_n$$

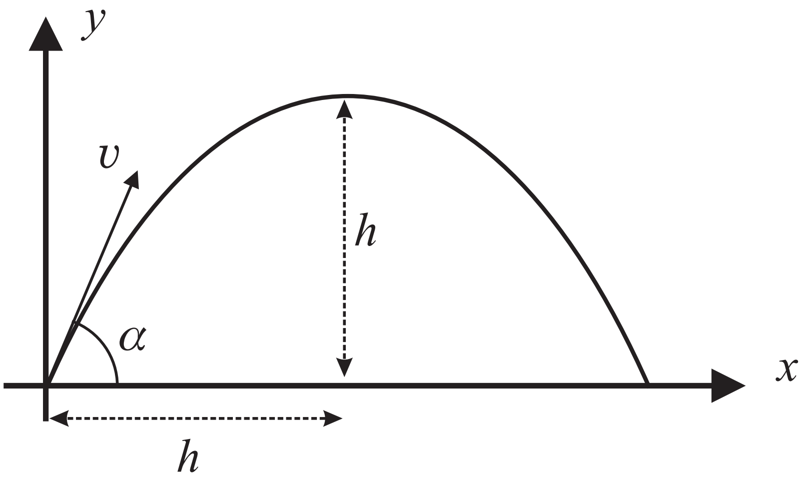
Detta ger,

Svar:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + aR\pi} \quad \text{och} \quad a_1 = \sqrt{a^2(1+\pi^2) + \frac{v_0^4}{R^2} + 2\frac{v_0^2}{R}a\pi}.$$

(Alternativ metod: Man kan även använda $\dot{s} = v = v_0 + at$ och $s = v_0t + (1/2)at^2$ och sätta $s = R\pi/2$ i den andra ekvationen och lösa ut vid vilken tid t_1 man nått slutet av kurvan. Detta ger insatt i den första ekvationen sedan v_1.)

Uppgift 3: En partikel skjuts iväg så att den uppnår maximala höjden h på det horisontella avståndet h från uppskjutningspunkten. Beräkna utgångshastighetens vinkel α med horisontalen och dess belopp v. Tyngdaccelerationen är g som vanligt.



Figur 3: Bild till Uppgift 3. h och g är givna. α och v skall räknas ut.

Lösning 3: Kraftekvationen och integration av den ger

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 &&\Rightarrow \dot{x} = v\cos\alpha &&\Rightarrow x = v\cos\alpha\; t \\ m\ddot{y} &= -mg &&\Rightarrow \dot{y} = v\sin\alpha - gt &&\Rightarrow y = v\sin\alpha\; t - (1/2)gt^2. \end{aligned}$$

Enligt förutsättningarna gäller att när $x = h$ så är $\dot{y} = 0$. Detta ger $h = v\cos\alpha\; t_h$ för tiden $t_h = h/(v\cos\alpha)$ vid toppen av banan. Sätts detta in i $\dot{y} = 0$ fås $0 = v\sin\alpha - g[h/(v\cos\alpha)]$. Detta ger slutligen att,

$$v^2 \sin\alpha\cos\alpha = gh. \tag{1}$$

Man har även att $y(t_h) = h$ vilket ger ekvationen $h = v\sin\alpha[h/(v\cos\alpha)] - (1/2)g[h/(v\cos\alpha)]^2$. Efter lite förenkling får man då ($\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$),

$$2v^2\cos^2\alpha(\tan\alpha - 1) = gh. \tag{2}$$

Eliminera gh genom att sätta dessa ekvationer lika. Dividera resultatet med $\cos^2\alpha$ så fås, $\tan\alpha = 2(\tan\alpha - 1)$. Ur denna löser man lätt ut att, $\tan\alpha = 2$ så man får

Svar:

$$\alpha = \arctan 2 \;\; (\approx 63^\circ{,}43).$$

v fås nu ur ekvation (1) genom att man använder trigonometriska ettan i: $2^2 = \tan^2\alpha = \sin^2\alpha/\cos^2\alpha$ vilket ger $4(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha$. Ur detta fås lätt att $\sin^2\alpha = 4/5$. Trigonometriska ettan en gång till ger då $\cos^2\alpha = 1/5$. Nu fås alltså ur (1) att

Svar:

$$v = \sqrt{\frac{5}{2}gh}.$$

Uppgift 4: Vinkelfrekvensen för en stålkula med massa m och radie r som hänger i en fjäder med fjäderkonstant k mäts, dels i luft, där den är ω_n, dels i en vätska med viskosisteten μ, där den är ω_d. Motståndskraften i vätskan ges av $F = \mu 6\pi r v$, där v är farten. Vad blir den dimensionslösa dämpningsfaktorn ζ i systemets rörelseekvation $\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x = 0$? Tag fram allmänna lösningen till denna ekvation vid *svag* dämpning.

Lösning 4: Med neåtriktad x'-axel fås kraftekvationen i vätskan till $m\ddot{x}' = -kx' - c\dot{x}' + mg$. Flytta origo till $x' = mg/k$ så att den nya x-koordinaten uppfyller $x = x' + mg/k$. Då fås $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ där $c = \mu 6\pi r$. Divideras med m och flyttas termerna till vänsterledet fås,

$$\ddot{x} + (\mu 6\pi r/m) + (k/m)x = 0.$$

Jämförs detta med $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$ fås direkt att $\omega_n^2 = k/m$ och att

$$2\zeta\omega_n = \mu 6\pi r/m.$$

Alltså blir

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n}\frac{\mu 6\pi r}{m} = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{k}}\frac{\mu 6\pi r}{m} = \frac{\mu 3\pi r}{\sqrt{km}}$$

Alltså **Svar 1:** $\zeta = \frac{\mu 3\pi r}{\sqrt{km}}$.
Allmänna lösningen tas fram genom exponentiell ansats och karaktäristisk ekvation enligt boken. Man får t.ex.

Svar 2:

$$x(t) = C\exp(-\zeta\omega_n t)\sin(\omega_d t + \alpha),$$

där $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Teoritentamen

Uppgift 5: Definiera skalärprodukten och vektor- eller kryssprodukten av två vektorer, $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, dels geometriskt med hjälp av längder och vinklar mm., dels i termer av vektorernas komponenter i någon ortogonal högerorienterad bas i det tredimensionella rummet.

Svar 5: Detta finns i appendix A. i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs.

Uppgift 6: Definiera momentet med avseende på O för en kraft $\boldsymbol{F}$ som angriper i punkten P. Definiera momentet för kraften m.a.p. en axel genom O parallell med enhetsvektorn $\boldsymbol{e}_\lambda$ och visa att detta moment är oberoende av momentpunktens läge på axeln.

Svar 6: Detta finns i avsnitt 2.3 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs.

Uppgift 7: Inför kraftekvationen uttryckt med hjälp av dess naturliga komponenter. Använd detta som utgångspunkt för att härleda lagen om kinetiska energin.

Svar 7: Detta finns i avsnitt 8.2 i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs.

Uppgift 8: Allmänna lösningen till en fri odämpad svängning kan antingen skrivas

$$x(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$$

eller

$$x(t) = C\sin(\omega_n t + \alpha).$$

Ta fram uttryck för α och C i termer av A och B. Vad betyder (kallas) storheterna C, α och ω_n?

Svar 8: Detta finns i Christer Nyberg, Mekanik – Grundkurs på sidan 265.

HE 2010 05 28