Tentamen IX1304 Matematik, Analys 2012-05-30, lösningsidéer

1.

Gör en linjär approximation till kurvan $y = \frac{x^2}{4}$, kring den punkt på kurvan där lutningen är 2.
Bestäm sedan för vilka x som det relativa felet för approximationen är mindre än 20 %.

Lösningsskiss

Kurvan har lutningen 2 för $x = 4$, vilket ger tangeringspunkten $\{4, 4\}$ och den linjära modellen

$$y_{\text{mod}} = 2\,x - 4.$$

Differensen mellan kurva och modell blir

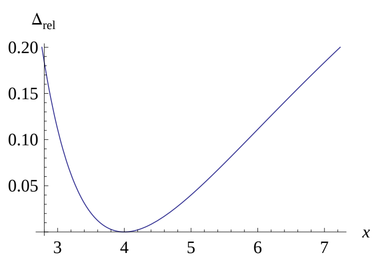
$$diff = y - y_{\text{mod}} = 4 - 2\,x + \frac{x^2}{4}$$

och det relativa felet

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{\text{diff}}{y} = \frac{4 - 2\,x + \frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4}}$$

$\Delta_{\text{rel}} = 1/5$ ger då: $x = 5 - \sqrt{5}\ \|\ x = 5 + \sqrt{5}$
och intervallet:

$$5 - \sqrt{5} < \text{x} < 5 + \sqrt{5}$$

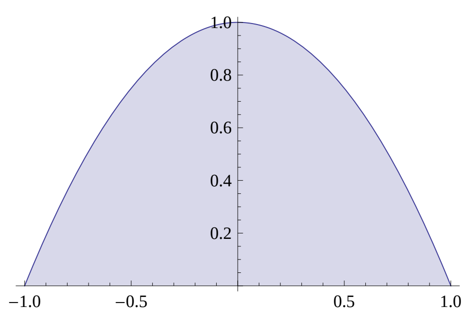


2.

Kurvan $y = 1 - x^2$ avgränsar tillsammans med x-axeln ett ändligt område i xy-planet. Om detta område roterar runt x-axeln bildas en rotationskropp. Bestäm volymen hos denna kropp.

Lösningsskiss

Kurvan är en parabel som avgränsar ett ändligt område för $-1 < x < 1$.



Rotationskroppen kan delas in i vertikala skivor med radien $1 - x^2$ och tjockleken dx.
Följdaktligen är skivornas volym

$$\pi\left(1 - x^2\right)^2 \text{dx}$$

och hela volymen

$$\int_{-1}^{1} \pi\left(1 - x^2\right)^2 \,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \pi\left(1-x^2\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \pi\left(1-2x^2+x^4\right) dx = \left[\pi x - \frac{2\pi x^3}{3} + \frac{\pi x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{16\pi}{15}$$

- **3.**

Bestäm definitionsmängd och värdemängd för funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2},$$

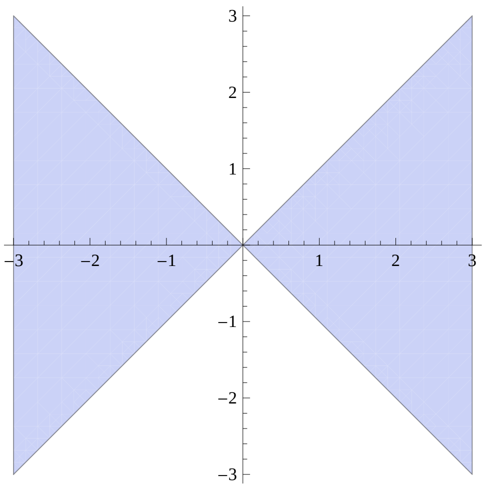
samt gör en figur där du i xy-planet åskådliggör definitionsmängden.

- **Lösningsskiss**

För uttrycket under rottecknet gäller

$$x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 \geq y^2$$

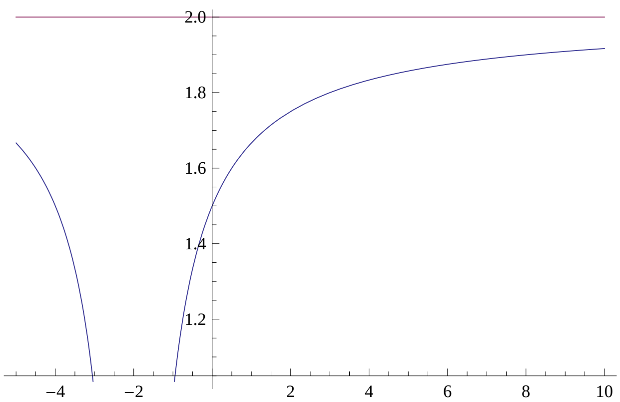
dvs, samma område som $|x| \geq |y|$



- **4.**

Undersök funktionen

$$f(x) = 2 - \frac{1}{|x+2|}$$



- **Lösningsskiss**

a) Bestäm funktionens nollställen

$f(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{|x+2|} = 0 \iff 2 = \frac{1}{|x+2|} \iff |x+2| = \frac{1}{2}$

Detta ger $x = -5/2$ eller $x = -3/2$

Definitionsmängd

$|x+2| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x \neq -2}$

c) Bestäm funktionens värdemängd

$x \to -2 \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$

$x \to \pm\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to 2$

$\mathbf{-\infty < f(x) < 2}$

d) Skissa funktionen (se figur ovan)

- **5.**

Bestäm arean av det begränsade område som avgränsas av kurvorna

$y = \sqrt{x-1}$,

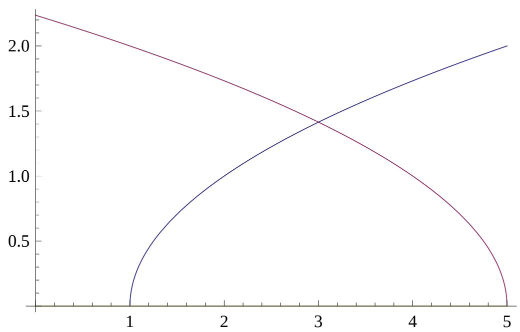
$y = \sqrt{5-x}$ och

$y = 0$.

- **Lösningsskiss**

$\sqrt{x-1}$ är definierad för x≥1 och $\sqrt{5-x}$ för $x \leq 5$

De två kurvorna skär varandra för $x = 3$



Vi får alltså dela in området i två delar med motsvarande areor:

Arean $= \int_1^3 \sqrt{x-1}\, dx + \int_3^5 \sqrt{5-x} = \left[\frac{2}{3}(-1+x)^{3/2}\right]_1^3 + \left[-\frac{2}{3}(5-x)^{3/2}\right]_3^5 = \mathbf{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$

- **6.**

Studera serien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} k^{n-1}$$

För vilka värden på k är serien konvergent och vad blir då summan?
Var noga med att motivera dina slutsatser.

- **Lösningsskiss**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} k^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n k^n \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3}\right)^n$$

Serien är alltså en oändlig geometrisk serie med kvoten $= \frac{k}{3}$.

Den är konvergent om $\left|\frac{k}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left|k\right| < 1 \Leftrightarrow \left|k\right| < 3 \Leftrightarrow \mathbf{-3 < k < 3}$

Summan blir $\frac{1}{3}\frac{1}{(1-k/3)} = \mathbf{\frac{1}{3-k}}$

- **7.**

Produktionen av råolja vid en viss oljekälla beskrivs av produktionsfunktionen

$$p(t) = 20 + 48\,t - 6\,t^2 \text{ [enheter/månad]}$$

för den tid då $p(t) > 0$.

Om man studerar produktionen från en godtycklig tidpunkt t_0 till $t_0 + 1$, kan man bestämma produktionen för en godtycklig månadslång period. Bestäm ett uttryck för denna produktion och använd sedan detta uttryck för att undersöka under vilken godtycklig månadslång period som produktionen blir störst.

- **Lösningsskiss**

Produktionen för en godtycklig månad blir:

$$\int_{t_0}^{t_0+1}\left(20 + 48\,t - 6\,t^2\right)dt = 42 + 42\,t_0 - 6\,t_0^2 = p_1(t_0)$$

Bestäm för vilket värde på t_0 som p_1 har sitt största värde.

$$p'_1(t_0) = 42 - 12\,t_0 = 0 \Rightarrow t_0 = 42/12 = 7/2$$

Produktionen blir då $42 + 42\,(7/2) - (7/2)^2 = \frac{707}{4}$ enheter

8.

Bestäm största och minsta värde för funktionen

$$f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

i området $y \geq 0$.

- **Lösningsskiss**

Derivering ger:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1-x^2+2\,x\,y+y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \text{ och } \frac{\delta f}{\delta y} = \frac{-1-x^2-2\,x\,y+y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

$\frac{\delta f}{\delta x} = 0$ och $\frac{\delta f}{\delta y} = 0$ ger då

$$1 - x^2 + 2\,x\,y + y^2 = 0 \quad (1)$$

och $\; -1 - x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 0 \; (2)$

(1)+ (2) ger då

$$-2\,x^2 + 2\,y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \text{ och } |x| = |y|$$

Detta insättes i (1) och (2) och vi får

$$2\,x\,y = -1, \text{ där } y \geq 0 \text{ och därför } x < 0.$$

Vidare:

$$2\,x\,y = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Alltså ger $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ den enda kritiska punkten $(x,\ y) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
med funktionsvärdet $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vidare ger randvillkoret $y = 0$ att

$$f(x,\ 0) = g(x) = \frac{x}{1+x^2}\ .$$

Vi ser att

$$g(x) \to 0 \text{ då } x \to \infty$$

och att

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(x) = \pm \frac{1}{2}$$

Srörsta och minsta värdet av funktionen, för $y \geq 0$ är alltså **1/2** resp. $\mathbf{-1 \Big/ \sqrt{2}}$