KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-06-04

DEL A

(1) Låt $g(x, y, z) = e^{2-xyz^2}$.
A. Ange en vektor som är ortogonal mot nivåytan $g(x, y, z) = 1$ i punkten $(2, 1, -1)$. **(2)**
B. Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $g(x, y, z) = 1$ i punkten $(2, 1, -1)$. **(2)**

Lösning. A. Gradienten är ortogonal mot nivåytan, så vi söker ∇g i punkten $(2, 1, -1)$. Vi deriverar partiellt och får $\partial g/\partial x = -yz^2 e^{2-xyz^2}$ och $\partial g/\partial y = -xz^2 e^{2-xyz^2}$ och $\partial g/\partial z = -2xyze^{2-xyz^2}$. I punkten $(2, 1, -1)$ får vi

$$\nabla g(2, 1, -1) = (-1, -2, 4),$$

som är den sökta vektorn.

B. Den vektor vi tog fram i uppgift A är ortogonal mot ytan och är därför en normalvektor till tangentplanet. En ekvation för det sökta tangentplanet är därför

$$(-1)(x - 2) + (-2)(y - 1) + 4(z - (-1)) = 0$$

vilket också kan skrivas

$$-x - 2y + 4z + 8 = 0.$$

□

Svar: Svar: A. $(-1, -2, 4)$ B. $-x - 2y + 4z + 8 = 0$

(2) Låt D vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $-x \leq y \leq x$ och $x^2+y^2 \leq 1$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D y\,dxdy.$$

(4)

Lösning. Området vi ska integrera över består av de punkter innanför enhetscirkeln som ligger över linjen $y = -x$ och under linjen $y = x$. Detta område är symmetriskt med avseende på x-axeln och integranden y är en udda funktion så vi ser därför direkt att

$$\iint_D y\,dxdy = 0$$

(Obs: detta kan förstås också räknas fram, t ex med hjälp av polära koordinater.) □

Svar: 0

(3) Ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ ges i området $x > 0,\ y > 0$ i planet av formlerna

$$P(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ och } Q(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

A. Bestäm konstanten a så att vektorfältet blir konservativt. **(2)**
B. Med konstanten a vald som i uppgift A, beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

då γ är det räta linjestycket från punkten $(1,1)$ till punkten $(5,4)$. **(2)**

Lösning. Vi ser att fältet är C^1 i det aktuella området, som är enkelt sammanhängande. Fältet är då konservativt om och endast om $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$. Vi deriverar partiellt och får:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{a}{y^2}$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Vi ser att dessa är lika om och endast om $a = 1$. Med detta val av konstanten a är alltså fältet konservativt.

B. Vektorfältet $\mathbf{F}$, med konstanten a vald till 1, är nu konservativt. Det har då en potential, dvs det finns en funktion U sådan att $\nabla U = \mathbf{F}$. Vi bestämmer en sådan funktion U. Vår U måste uppfylla att

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{och} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Om vi integrerar det andra av dessa villkor m a p y får vi att

$$U(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{x}{y} + g(x)$$

för någon funktion g. Om vi deriverar detta med avseende på x och jämför med det första villkoret ovan får vi kravet att

$$\frac{2x}{(x^2+y^2} - \frac{1}{y} + g'(x) = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$$

vilket är uppfyllt om vi väljer $g(x) = -\ln x$. Vi har alltså en potential:

$$U(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{x}{y} + \ln x$$

.

Kurvintegralen kan nu beräknas med hjälp av potentialen:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(5,4) - U(1,1) = \ln\frac{205}{2} - \frac{1}{4}.$$

$\square$

Svar: $\ln\frac{205}{2} - \frac{1}{4}$.

DEL B

(4) Betrakta problemet att optimera funktionen $f(x,y) = (1+3x+2y)^2$ för (x,y) som ligger på enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$.
A. Hur kan man på förhand veta att problemet har en lösning, dvs att f verkligen har ett största och ett minsta värde för aktuella (x,y)? **(1)**
B. Lös problemet, dvs hitta största och minsta värdet av f på enhetscirkeln! **(3)**

Lösning. A. Funktionen f är kontinuerlig på enhetscirkeln som är en kompakt mängd. Alltså följer det att funktionen antar ett största och ett minsta värde när (x,y) varierar i mängden.

B. Sätt $g(x,y) = x^2 + y^2$. Vi ska då optimera f under bivillkoret $g = 1$. Eftersom enhetscirkeln ligger i det inre av definitionsmängden till f och både f ocho g är C^1 så gäller enligt Lagranges sats följande: i en optimal punkt är ∇f parallell med ∇g. Eftersom den senare vektorn är nollskild på mängden $g = 1$ får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 6(1+3x+2y) = \lambda 2x \\ 4(1+3x+2y) = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De första två ekvationerna ger att antingen är $1 + 3x + 2y = 0$ eller så är $x/3 = y/2$, dvs $y = 2x/3$. Det första fallet ger en punkt där värdet av funktionen f är 0. Det andra fallet ger vid insättning i den tredje ekvationen att $x^2 + (2x/3)^2 = 1$ dvs $x = \pm 3/\sqrt{13}$. Detta ger oss två möjliga optimala punkter, nämligen $\pm(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13})$. Jämförelse av funktionsvärdena till f i dessa punkter ger att största värdet av f på enhetscirkeln är $f(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}) = (1+\sqrt{13})^2$ och det minsta värdet är 0.

$\square$

Svar: största värdet av f på enhetscirkeln är $f(3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}) = (1+\sqrt{13})^2$ och det minsta värdet är 0.

(5) Beräkna volymen av kroppen K som ges av

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \text{ och } 1 \leq z \leq x + y + 11\}.$$

(4)

Lösning. Låt D vara den mängd i xy-planet som ges av olikheten $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ eller ekvivalent av $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Då ges den sökta volymen V av

$$V = \iint_D (x + y + 11 - 1)\, dxdy = \iint_D (x + y + 10)\, dxdy.$$

Om vi i denna integral inför translaterade polära koordinater, $x = r\cos\varphi$ och $y = 1 + r\sin\varphi$, där r går från 0 till 1 och φ går från 0 till 2π får vi

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (r\cos\varphi + r\sin\varphi + 10) r\, dr \right) d\varphi = 10\pi.$$

□

Svar: 10π

(6) Avgör om det går att byta integrationsordning i den itererade integralen

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\, dx \right) dy.$$

Beräkna integralen! **(4)**

Lösning. Integrationsområdet är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$. Integranden är kontinuerlig på hela triangeln, inklusive randen. Därför går det att byta integrationsordning. Om vi byter integrationsordning får vi

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = \frac{1-e^{-1}}{2}.$$

.

□

Svar: $\frac{1-e^{-1}}{2}$..

Del C

(7) Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2y + y^3$ med definitionsmängd D given av olikheten $2x^2 + y^2 \leq 3$. En punkt (x_0, y_0) på randen till området D kallas för en *stationär randpunkt* till f om riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) = 0$ för alla riktningar $\mathbf{v}$ som är parallella med randkurvan i (x_0, y_0).
A. Avgör om punkten $(1,1)$ är en stationär randpunkt till f. **(2)**
B. Bestäm alla stationära randpunkter till f. **(2)**

Lösning. Vi har att riktningsderivatan av f i en punkt (x,y) i den normerade riktningen $\mathbf{v}$ är

$$f'_{\mathbf{v}} = (\nabla f)\cdot\mathbf{v} = (2xy, x^2 + 3y^2)\cdot(v_1, v_2) = 2xyv_1 + (x^2 + 3y^2)v_2.$$

I en stationär randpunkt ska detta bli noll för alla riktningar (v_1, v_2) som är parallella med randkurvan. Vilka riktningar är det? Randkurvan ges av $2x^2 + y^2 = 3$. Ta en punkt (x_0, y_0) på randkurvan. En vektor ortogonal mot randkurvan i denna punkt är $(4x_0, 2y_0)$. Alla vektorer som är parallella med randkurvan i punkten ges därför av $k(2y_0, -4x_0)$ för någon konstant k. Vi får alltså följande villkor för att punkten (x_0, y_0) ska vara en stationär randpunkt:

$$2x_0y_0 2y_0 + (x_0^2 + 3y_0^2)(-4x_0) = 0$$

där samtidigt $2x_0^2 + y_0^2 = 3$ ska vara uppfyllt. Vi ser att enda lösningen är att $x_0 = 0$ och $y_0 = \pm\sqrt{3}$ Vi har alltså två stationära randpunkter, nämligen $(0, \pm\sqrt{3})$, vilket är svaret på uppgift B. Svaret på A är därmed nej.

□

Svar: A. Nej B. $(0, \pm\sqrt{3})$

(8) En plan strömning parallell med x-axeln i ett standardkoordinatsystem har hastighetsfältet $\mathbf{w}(x, y) = (v_0, 0)$, där v_0 är en konstant. Ett cirkulärt hinder, med medelpunkt i origo och radien R, placeras i strömningen. Detta förändrar hastighetsfältet. När jämvikt inställt sig är strömningen stationär (tidsoberoende) och under vissa antaganden kan man visa att det nya hastighetsfältet $\mathbf{v}$ har potentialen

$$\Phi(x, y) = v_0 x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right).$$

A. Bestäm hastighetsfältet $\mathbf{v}(x, y)$ då $x^2 + y^2 > R^2$. **(1)**
B. Bestäm hastigheten i de fyra punkterna $(\pm 2R, \pm 2R)$. **(1)**
C. Visa att strömlinjerna (kurvor som i varje punkt (x, y) har $\mathbf{v}(x, y)$ som tangent) skär y-axeln under rät vinkel. **(1)**
D. Beräkna $\lim_{x \to \pm\infty} \mathbf{v}(x, y)$ och skissa med ledning av detta gränsvärde och uppgift B och C ett par strömlinjer. **(1)**

Lösning. A. Hastighetsfältet är gradienten av potentialen, dvs

$$\mathbf{v}(x, y) = \nabla\Phi(x, y) = \left(v_0\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x^2 v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$$

B. Vi sätter in punkterna i ovanstående uttryck och får

$$\mathbf{v}(\pm 2R, \pm 2R) = v_0\left(1, \pm\frac{1}{8}\right),$$

med plustecken i andra koordinaten när x och y har olika tecken och minustecken annars.

C. I alla punkter på y-axeln är x-koordinaten 0. Sätter vi in detta i uttrycket för $\mathbf{v}$ får vi

$$\mathbf{v}(0, y) = \left(v_0\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right), 0\right),$$

vilket är en vektor parallell med x-axeln, eller med andra ord vinkelrät mot y-axeln.

D. Om vi låter $x \to \pm\infty$ i uttrycket för $\mathbf{v}$ ovan ser vi att alla rationella uttryck går mot 0 så vi får

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathbf{v}(x, y) = (v_0, 0).$$

Skiss av några strömlinjer:

□

Svar: A. $\mathbf{v}(x, y) = \left(v_0\left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x^2 v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2xy v_0 R^2}{(x^2 + y^2)^2}\right).$

B. $\mathbf{v}(\pm 2R, \pm 2R) = v_0\left(1, \pm\frac{1}{8}\right)$ (med + vid lika tecken och - vid olika).

C. –
D. $\lim_{\to\pm\infty} \mathbf{v}(x,y) = (v_0, 0).$

(9) Ett klot med radie r har sin medelpunkt på ytan av ett klot med radie R, där $R > r$. Beräkna volymen av den del av det mindre klotet som befinner sig inuti det större klotet. **(4)**

Lösning. Vi inför koordinater så att det stora klotet har medelpunkt i origo och det lilla klotet i $(0, 0, R)$. Skärningspunkter mellan klotens begränsningsytor fås då när $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ och $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = r^2$ båda är uppfyllda, dvs då $z = R - r^2/2R$ och $x^2 + y^2 = r^2 - r^4/4R^2$. Den del av det mindre klotet som ligger inuti det större klotet kan nu beskrivas så att $R - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ och $x^2 + y^2 \leq r^2 - r^4/4R^2$. Kalla projektionen av denna mängd på xy-planet för D. Med hjälp av polära koordinater får vi nu den sökta volymen V som

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - R + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\right) dxdy \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2 - r^4/4R^2}} \left(\sqrt{R^2 - v^2} - R + \sqrt{r^2 - v^2}\right) v\, dv \\
&= 2\pi \left[-\frac{(R^2 - v^2)^{3/2}}{3} - \frac{Rv^2}{2} - \frac{(r^2 - v^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{\sqrt{r^2 - r^4/4R^2}} \\
&= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} + \frac{R^3}{3} - \frac{\left(R^2 - r^2 + \frac{r^4}{4R^2}\right)^{3/2}}{3} - \frac{R\left(r^2 - \frac{r^4}{4R^2}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{r^4}{4R^2}\right)^{3/2}}{3} \right],
\end{aligned}
$$

vilket med viss möda kan förenklas till

$$
\frac{2\pi r^3}{3} - \frac{\pi r^4}{4R}.
$$

□

Svar: $\dfrac{2\pi r^3}{3} - \dfrac{\pi r^4}{4R}$.