Reglerteknik AK Tentamen 2011-10-17
Lösningsförslag

Uppgift 1a

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{s}{(s+1)(s+2)}.$$

Svar: $G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$.

Uppgift 1b

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K(-s+1)}{s + 1 + K(-s+1)}.$$

Slutna systemets pol blir

$$s + 1 + K(-s+1) = 0 \Rightarrow s = \frac{1+K}{K-1}.$$

Slutna systemets pol är negativ för $-1 < K < 1$. I och med att K måste vara positiv så får vi följande värden på K: $0 < K < 1$.

Svar: $0 < K < 1$.

Uppgift 1c

Identifiera först det öppna systemet, G_o.

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{10}{1 + 10s} = \frac{10/s}{1 + 10/s} \Rightarrow G_o(s) = \frac{10}{s}.$$

Från definitionen för skärfrekvensen så har vi

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{10}{|i\omega_c|} = \frac{10}{\omega_c} \Rightarrow \omega_c = 10.$$

Följaktligen blir $T = 0,35/\omega_c = 0.035$.

Svar: $T = 0.035$ s

Uppgift 1d

Bestäm relationen mellan u och e i tidsdomänen.

$$U(s) = F(s)E(s) = 10\frac{s+0.1}{s}E(s) \Rightarrow \dot{u}(t) = 10\dot{e}(t) + e(t).$$

Approximera tidsderivatan med Tustins formel.

$$\Delta_T u(t) = 10\Delta_T e(t) + e(t),$$

där

$$\Delta_T = \frac{2}{T}\frac{1-q_T^{-1}}{1+q_T^{-1}}.$$

Insättning med $T = 0.2$ ger

$$u(t) = u(t-T) + (10 + T/2)e(t) + (T/2 - 10)e(t-T).$$

Svar: $u(t) = u(t-T) + 10.1e(t) - 9.9e(t-T)$.

Uppgift 2a

Låt systemet vara $\dot{x} = Ax + Bu$ och $y = Cx$. En dubbelpol i $-\lambda$ motsvarar den karakterisktiska ekvationen $(s+\lambda)^2 = s^2+2\lambda s+\lambda^2$. Med tillståndsåterkoppling får vi följande karakteristiska ekvation:

$$\begin{aligned}\det(A - BL - sI) &= \begin{vmatrix} -3-\ell_1-s & 5-\ell_2 \\ -1 & 1-s \end{vmatrix} \\ &= (1-s)(-3-\ell_1-s) + 5 - \ell_2 \\ &= s^2 + s(3+\ell_1-1) - 3 - \ell_1 + 5 - \ell_2.\end{aligned}$$

De två ekvationerna är ekvivalenta om och endast om

$$\begin{cases} 2+\ell_1 = 2\lambda \\ 2-\ell_1-\ell_2 = \lambda^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 + \frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_2 = -\lambda^2 - \ell_1 + 2. \end{cases}$$

Vi kan se att λ antar sitt maximala värde då $\ell_1 = 6$. Detta motsvarar $\lambda = 4$ och $\ell_2 = -20$. Så återkopplingen blir $u = \begin{bmatrix} 6 & -20 \end{bmatrix} x + r$.

Svar: $u = \begin{bmatrix} 6 & -20 \end{bmatrix} x + r$.

Uppgift 2b

Vi verifierar först att $x_1^0 = 1$ och $x_2^0 = 1$ är en stationär punkt och beräknar motsvarande stationära punkt u^0.

$$f_1(x^0, u^0) = \frac{-1}{3 + (x_2^0)^2} + (x_1^0)^2 (u^0)^2 = \frac{-1}{4} + (u^0)^2 = 0 \Rightarrow u^0 = \pm\frac{1}{2}.$$
$$f_2(x^0, u^0) = 2 - (x_1^0)^2 - (x_2^0)^2 = 0.$$

Vid linjärisering så utför vi en första ordningens Taylorutveckling runt en stationär punkt. Jakobianerna ges av

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix},$$

utvärderade i stationäritet. De nödvändiga derivatorna ges av

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_1 u^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{(3 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2x_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2x_2,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 2x_1^2 u, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0.$$

Vi definierar $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$ och $\Delta u = u - u^0$. Insättning av $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$ och $u^0 = \pm 1/2$ i Jakobianerna ger den linjära approximationen

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u,$$

för $u^0 = 1/2$ och

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u,$$

för $u^0 = -1/2$.

Svar: $u^0 = 1/2$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

$u^0 = -1/2$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Delta x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u.$$

Uppgift 3

3 gånger snabbare än med en P-regulator med $K = 0.1$

Vi hittar först skärfrekvensen ω_c vid P-reglering. Beloppskurvan för det öppna systemet är

$$|G_o| = |FGe^{-0.1s}| = |KGe^{-0.1s}| = |K||G|.$$

Per definition så är $|G_o(i\omega_c)| = 1$. Alltså har vi

$$|G_o(i\omega_c)| = |K||G(i\omega_c)| = 0,1|G(i\omega_c)| = 1 \Rightarrow |G(i\omega_c)| = 10.$$

Från bodediagrammet kan vi utläsa att $\omega_c \approx 0,4$ rad/s. För att få ett 3 gånger snabbare system så ska vi välja en ny skärfrekvens som är 3 gånger så stor.

$$\Rightarrow \omega_{c,d} = 1,2 \text{ rad/s}.$$

Samma översläng som för P-regulatorn

Om vi vill behålla samma översläng så ska vi, enligt tumregel, behålla samma fasmarginal. Vi hittar först fasmarginalen vid P-reglering. Argumentskurvan för det öppna systemet är

$$\arg(G_o) = \arg(FGe^{-0,1s}) = \arg(KGe^{-0,1s}) = \arg(G) - 0,1\omega.$$

Per definition så är $\varphi_m = \arg(G_o(i\omega_c)) - (-180^o)$. Alltså har vi

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \arg(G_o(i\omega_c)) - (-180^o)\\ &= \arg(G(i\omega_c)) - 0,1\omega_c + 180^o\\ &\approx -142^o - 0,04 \cdot \frac{180^o}{\pi} + 180^o\\ &= 35,7^o.\end{aligned}$$

Fasmarginalen vid den önskade skärfrekvensen, ω_c, ges av

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_m &= \arg(G_o(i\omega_{c,d})) - (-180^o)\\ &= \arg(G(i\omega_{c,d})) - 0,1\omega_{c,d} + 180^o\\ &\approx -164^o - 0,12 \cdot \frac{180^o}{\pi} + 180^o\\ &= 9,1^o.\end{aligned}$$

Följaktligen så vill vi höja fasen med $26,6^o$. I och med att vi kommer introducera en lag-del så vill vi, enligt tumregel, höja fasen ytterligare $5,7^o$.

$$\Rightarrow \text{Fashöjningen är } 32,3^o.$$

Lead-delen

Vi kan nu bestämma de olika parametrarna i lead-delen,

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}.$$

β fås ur figur 5.13 i kursbok till 0,30. τ_D fås från tumregeln, $\tau_D = 1/(\omega_{c,d}\sqrt{\beta})$, till 1,52. K bestäms så att den önskade skärfrekvensen blir den faktiska skärfrekvensen,

$$|G_o(i\omega_{c,d})| = |F_{lead}(i\omega_{c,d})||G(i\omega_{c,d})||e^{-0.1\omega_{c,d}i}| \approx \frac{K}{\sqrt{\beta}} \cdot 1.3 \cdot 1 = 1 \Rightarrow K \approx 0,4.$$

$$\Rightarrow F_{lead}(s) = 0,4\frac{1,5s + 1}{0,32 \cdot 1,5s + 1}.$$

Statiska felet vid en ramp som insignal ska vara mindre än 0,5

För att uppfylla detta så introducerar vi en lag-länk,

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}.$$

Lag-delen

τ_I fås från tumregeln, $\tau_I = 10/\omega_{c,d}$, till 8,3. γ bestäms så att kravet på felet är uppfyllt.

$$e_1 = \lim_{s\to 0}\frac{1}{G_o(s)} = \frac{1}{\frac{1}{K}\frac{25000}{3400}} = \frac{3400\gamma}{25000K} < 0,5 \Rightarrow \gamma = 2,5.$$

$$\Rightarrow F_{lag}(s) = \frac{8,3s + 1}{8,3s + 2,5}.$$

Svar: $F(s) = 0,4\frac{1,5s+1}{0,32\cdot 1,5s+1}\frac{8,3s+1}{8,3s+2,5}$.

Uppgift 4a

Hitta $G_c(s)$

Härledning av överföringsfunktionen för det slutna systemet,

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{Fg(s)}{1+FG(s)} \\
&= \frac{\frac{3s+1}{s}\frac{1}{(s-1)(\epsilon s+1)}}{1+\frac{3s+1}{s}\frac{1}{(s-1)(\epsilon s+1)}} \\
&= \frac{3s+1}{s(s-1)(\epsilon s+1)+3s+1}.
\end{aligned}
$$

Identifiera $P(s)$ och $Q(s)$

Skriv om nämaren till $G_c(s)$ som

$$s(s-1)(\epsilon s+1)+3s+1 = \epsilon(s^3-s^2)+(s^2+2s+1).$$

Detta ger

$$Q(s) = s^3-s^2, \quad P(s) = s^2+2s+1.$$

Dock måste gradtalet för $P(s)$ vara större än gradtalet för $Q(s)$. Så är ej fallet. Vi hanterar detta genom att rita rotorten för $K = 1/\epsilon$ istället. Följaktligen blir

$$P(s) = s^3-s^2, \quad Q(s) = s^2+2s+1.$$

Hitta startpunkter

Startpunkter är de s där $P(s) = 0$. De är $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ och $s_3 = 1$.

Hitta ändpunkter

Ändpunkter är de s där $Q(s) = 0$. De är $s_1 = -1$, $s_2 = -1$.

Antal asymptoter

Antalet asymptoter är $n - m = 1$, där n är gradtalet för $P(s)$ och m är gradtalet för $Q(s)$.

Hitta riktningar

Asymptotens riktning ges av

$$\frac{\pi}{n-m} = \pi.$$

Följaktligen kommer asymptoten ej att skära reella axeln.

Hitta eventuell skärning med imaginära axeln

Sätt in $s = i\omega$ i $P(s) + KQ(s) = 0$ och lös ekvationen för reella ω och icke-negativa K. Vi får

$$\begin{aligned}
&P(i\omega) + KQ(i\omega) = -i\omega^3 + \omega^2 - K\omega^2 + 2Ki\omega + K = 0 \\
&\Rightarrow \omega = 0,\ K = 0 \text{ och } \omega = \sqrt{3},\ K = 3/2.
\end{aligned}$$

Bestäm de delar av reella axeln som tillhör rotorten.

Den del av reella axeln som tillhör rotorten är $-\infty < s \leq 1$.

Rita rotorten.

Se figur 1.

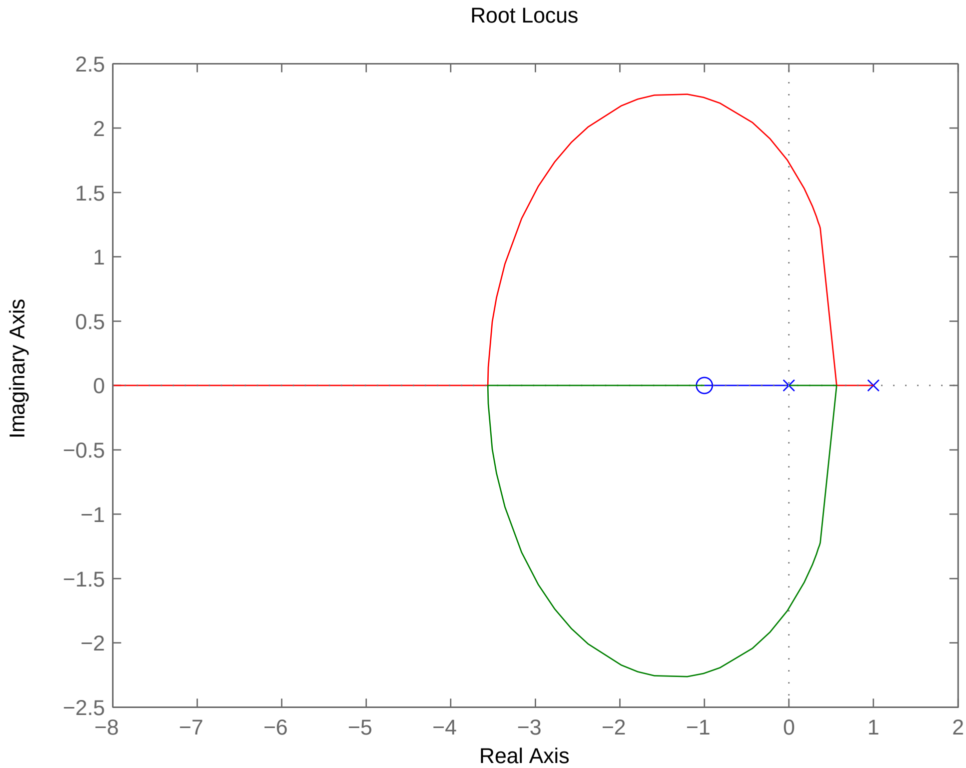

Figure 1: Rotort med avseende på K.

Följaktligen så är det slutna systemet stabilt för $K > 3/2 \Rightarrow 0 \leq \epsilon < 2/3$.

Svar: $0 \leq \epsilon < 2/3$.

Uppgift 4b

Identifiera relativa modellfelet. Enligt definitionen så har vi

$$G^0(s) = G(s)[1 + \Delta_G(s)].$$

I vårt fall så är

$$G^0(s) = \frac{1}{(s-1)(\epsilon s + 1)} = G(s)(1 - \frac{\epsilon s}{\epsilon s + 1}) \Rightarrow \Delta_G(s) = \frac{-\epsilon s}{\epsilon s + 1}$$

Enligt robusthetskriteriet så är det slutna systemet stabilt om $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$ för alla ω. Den asymptotiska amplitudkurvan för

$$\frac{1}{\Delta_G(s)} = \frac{1 + s/(1/\epsilon)}{-s/(1/\epsilon)}$$

har lutning -1 fram till $\omega = 1/\epsilon$ och sedan lutning 0. Den har förstärkning 1 för frekvenser $\omega > 1/\epsilon$. Enligt figuren har $|T(i\omega)|$ förstärkning mindre än 1 för ungefär $\omega > 3$, så olikheten är uppfylld om $\epsilon < 0.33$.
Svar: $0 \leq \epsilon < 0.33$.

Uppgift 5a

Insättning av uttrycket för regulatorn i uttrycket för systemet ger

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \dot{y}(t) + r(t) \Rightarrow y(t) = r(t).$$

Följaktligen är det slutna systemets överföringsfunktion $G_c(s) = 1$.

Uppgift 5b

Beräkna överföringsfunktionen för systemet.

$$\dot{y}(t) = -y(t) + \dot{y}(t) + u(t) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Överföringsfunktionen för regulatorn är given som $F(s) = s$. Givet uttrycket för regulatorn i tidsdomänen så vet vi att regulatorn verkar enbart på utsignalen y. Vi vet även att vi har positiv återkoppling. Vi får följande samband:

$$
\begin{aligned}
&Y(s) = V(s) + G(s)\left(R(s) + F(s)Y(s)\right) \\
&\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1 - G(s)F(s)}V(s) + \frac{G(s)}{1 - G(s)F(s)}R(s)) \\
&\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1 - \frac{s}{s+1}}V(s) = (s+1)V(s).
\end{aligned}
$$

Alltså, överföringsfunktionen från v till y är $G_{v\to y} = s + 1$. Beloppet av $G_{v\to y}$ är större eller lika med 1 för alla ω. Störningen kommer aldrig att undertryckas.

Svar: Störningen $v(t)$ kommer inte att undertryckas för något ω.

Uppgift 5c

Bestäm uttrycket för $y(t)$.

$$
\begin{aligned}
&Y(s) = (s+1)V(s) \\
&\Rightarrow y(t) = \dot{v}(t) + v(t) = \{v(t) = \sin(t^2)\} = -t\cos(t^2) + \sin(t^2).
\end{aligned}
$$

Vi ser att gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ ej existerar. Utsignalen $y(t)$ kommer att oscillera snabbare och snabbare med högre och högre amplitud.

Svar: Gränsvärdet existerar ej.

Uppgift 5d

Regulatorn är väldigt känslig för störningar. Vi kan inte undertrycka störningen och för den specifika störsignalen i Uppgift (5c) så divergerar $y(t)$.

Svar: Det är inte en bra regulator.