



EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 3:
Stabilitet, rotort och Nyquistkriteriet

Innehåll

- Laplacetransform (repetition, slides)
 - Överföringsfunktion, poler och nollställen
 - Stegsvvar
 - Återkopplat system = slutet system
- Rotort (tavlan)
- Nyquistkriteriet (tavlan)

Laplace transform

- Laplace transform av diff.ekvation (antag beg. värden = 0)

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0 \dot{u}(t) + b_1 u(t)$$

$$\Downarrow \mathcal{L}$$

$$s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 Y(s) = b_0 s U(s) + b_1 U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{G(s)} U(s)$$

- $G(s)$ = överföringsfunktion
- Rötter till nämnare = *poler* (avgör stabilitet, jämför med en diff.ekvations karakteristiska ekvation)
- Rötter till täljare = *nollställen* (påverkar snabbhet)

Stegsvar: $y(t)$ då $u(t)=1, t \geq 0 \Leftrightarrow U(s)=1/s$

$$Y(s) = G(s)U(s) = K \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} \frac{1}{s}$$

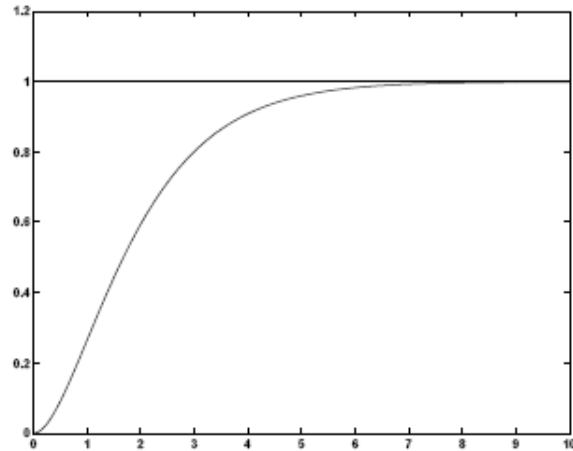
$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1} \text{ (distinkta } \lambda_i \text{)}$$

$$y(t) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}$$

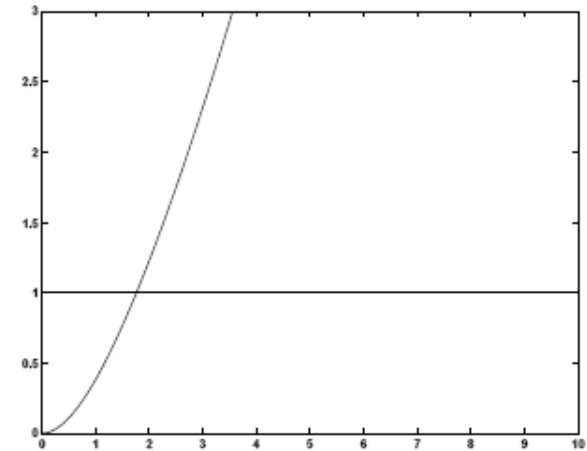
- Asymptotiskt stabilt om, och endast om, alla $\text{Re } \lambda_i < 0$
- Stora $|\lambda_i|$ ger snabbt stegsvar
- Komplexa poler ger svängningar, ökar med $\text{Im } \lambda_i / \text{Re } \lambda_i$

Stegsvarens principiella utseende

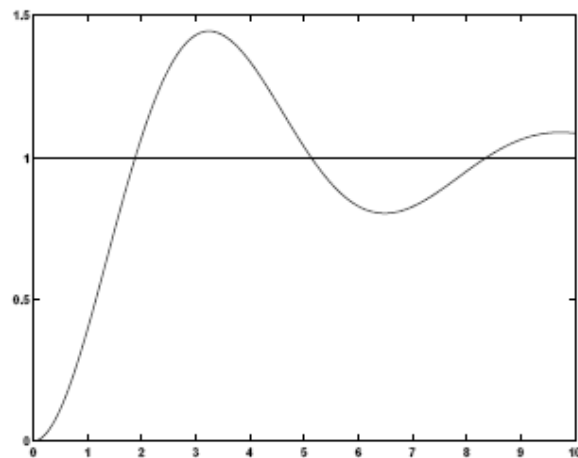
λ reella och negativa:



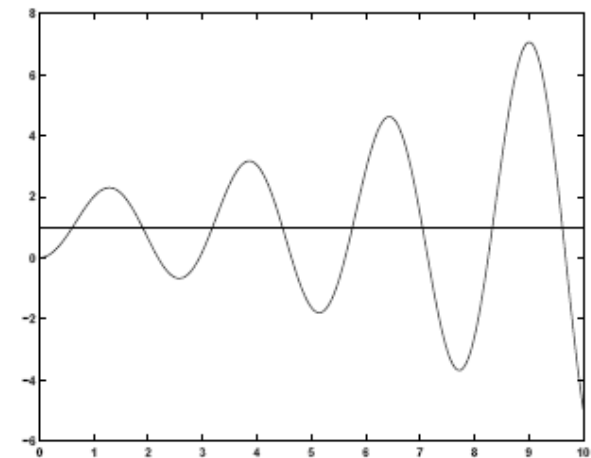
λ reella och positiva:



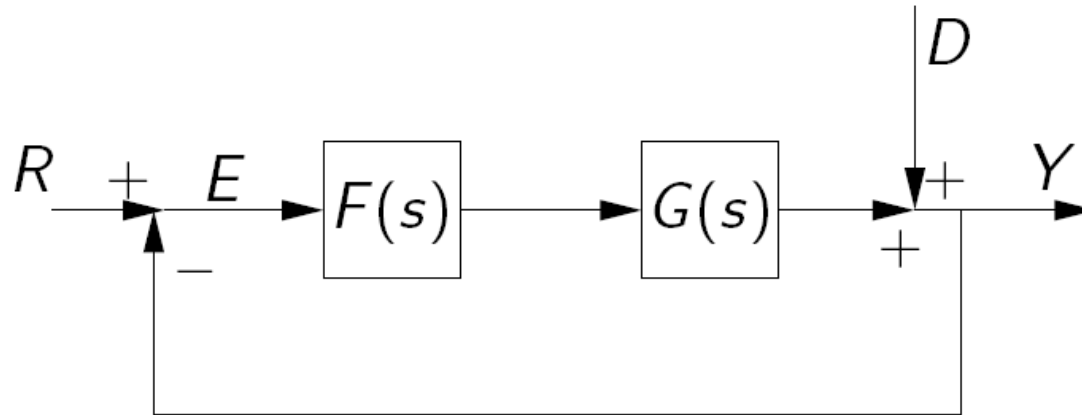
λ komplexa och $Re(\lambda) < 0$:



λ komplexa och $Re(\lambda) > 0$:



Återkopplat system = Slutet system



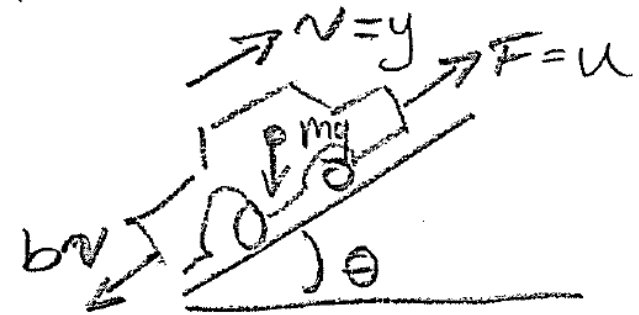
$G(s)$ - system, $F(s)$ - regulator.

- Slutna systemets överföringsfunktion:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

- Återkoppling med $F(s)$ flyttar systemets poler!

Farthållning av bil



- Bilmodell $m = 1000$, $b = 100$, $\theta = 0$

$$\dot{y} = -0.1y(t) + 0.001u(t) \quad \Rightarrow^{\mathcal{L}} \quad Y(s) = \underbrace{\frac{0.001}{s + 0.1}}_{G(s)} U(s)$$

- PI-regulator

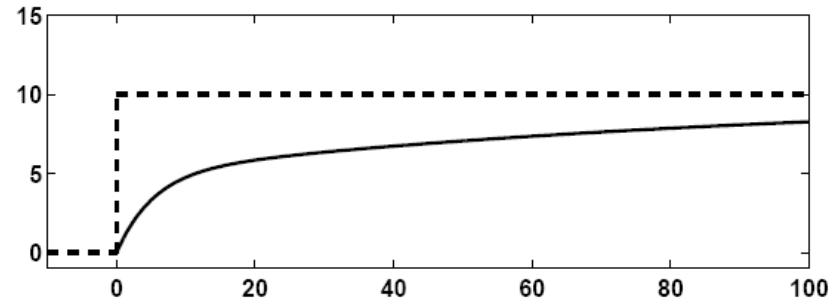
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \quad \Rightarrow^{\mathcal{L}} \quad U(s) = \underbrace{\frac{K_P s + K_I}{s}}_{F(s)} E(s)$$

- ger, med $K_P = 100$, slutna systemet

$$Y(s) = \frac{0.1s + 0.001K_I}{s^2 + 0.2s + 0.001K_I} R(s)$$

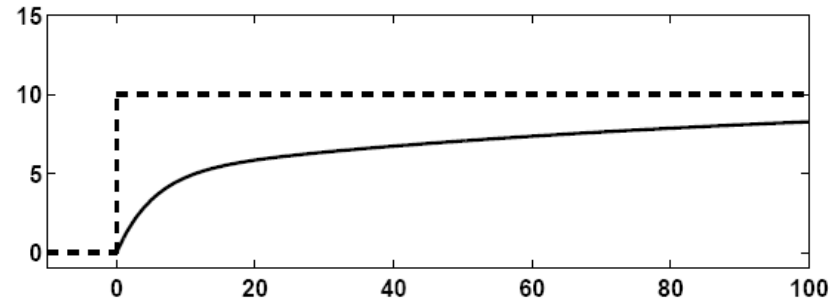
Simulering av farthållningssystem

- $K_I = 2 \rightarrow$ poler: $s = -0.01, s = -0.19$

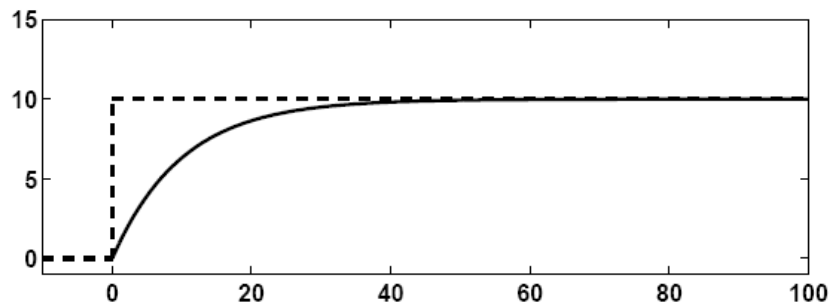


Simulering av farthållningssystem

- $K_I = 2 \rightarrow$ poler: $s = -0.01, s = -0.19$

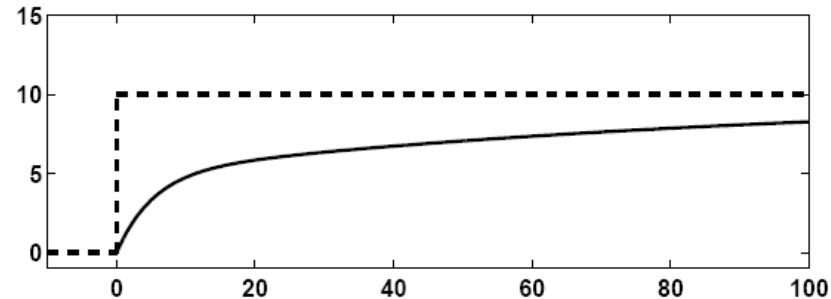


- $K_I = 10 \rightarrow$ poler: $s = -0.1, s = -0.1$

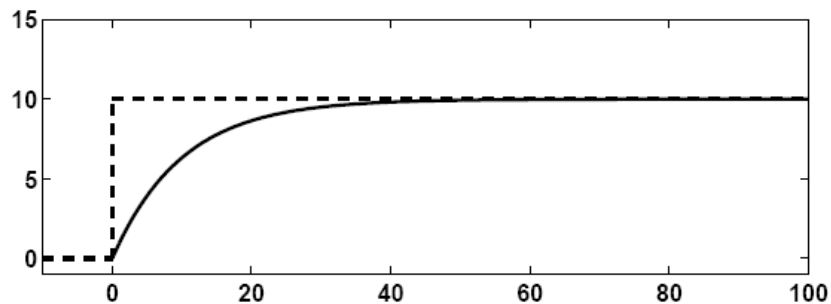


Simulering av farthållningssystem

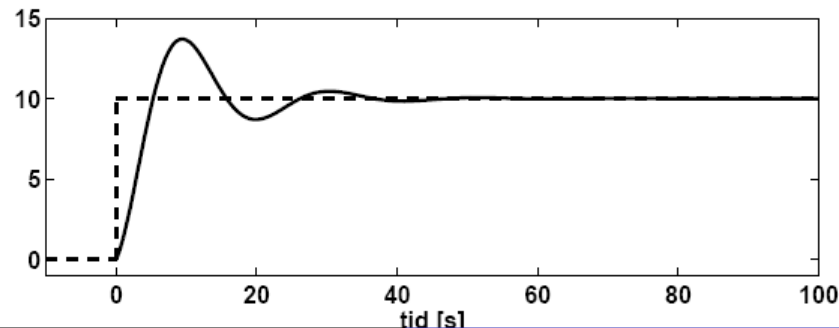
- $K_I = 2 \rightarrow$ poler: $s = -0.01, s = -0.19$



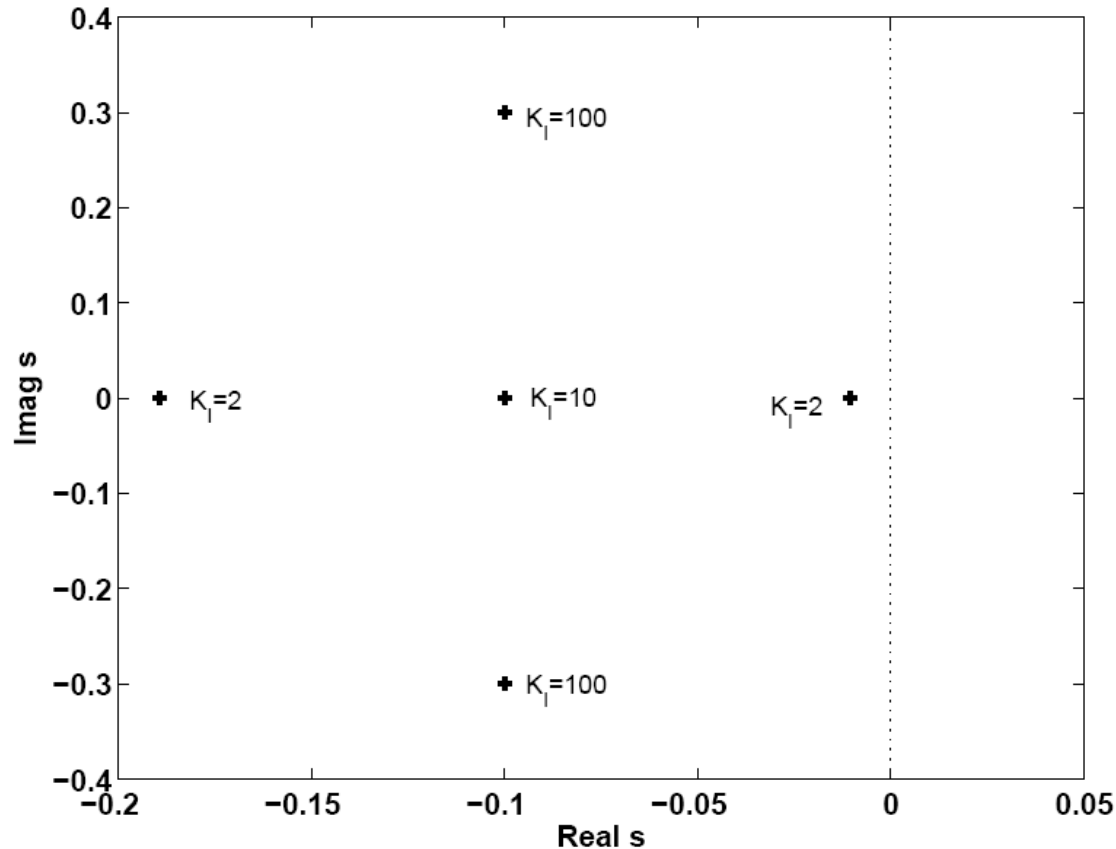
- $K_I = 10 \rightarrow$ poler: $s = -0.1, s = -0.1$



- $K_I = 100 \rightarrow$ poler: $s = -0.1 \pm i0.3$



Polernas läge för olika K_I



- Hur flyttar sig polerna då K_I ändras? $\Rightarrow$ **Rotort**
- För vilka K_I hamnar någon pol i komplexa högra halvplanet (HHP)? $\Rightarrow$ **Nyquistkriteriet**