



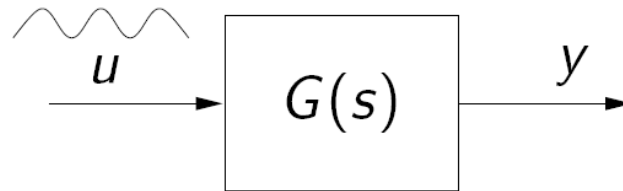
EL1000/1120/1110 Reglerteknik AK

Föreläsning 5:
Stabilitetsmarginaler och kompensering

Innehåll

- Frekvenssvar och Bodediagram (repetition)
- Bodediagram för system med komplexa poler
- Stabilitetsmarginaler
 - Amplitudmarginal
 - Fasmarginal
- Specifikation av prestanda i tids- och frekvensplanet
- Regulatorsyntes ("konstruera $F(s)$ ") via kompensering i frekvensplanet

Frekvensbeskrivning



- $u(t) = \sin(\omega t)$ ger, efter insvängning,

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \phi) ; \quad \phi = \arg G(i\omega)$$

- $G(i\omega)$ kallas *frekvenssvaret*
- Grafisk presentation av $G(i\omega)$:
 - I. Amplitud och fas var för sig $\Rightarrow$ *Bodediagram*
 - II. I komplexa talplanet $\Rightarrow$ *Nyquistdiagram*

Bodediagram - Allmänt

$$G(s) = \frac{K(1 + \frac{s}{z_1}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{s^p(1 + \frac{s}{p_1}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

- Amplitudkurva:

$$\log|G| = \log|K| + \frac{1}{2}\log(1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}) + \dots - p \log\omega - \frac{1}{2}\log(1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}) + \dots$$

- Asymptotiskt:

- små ω : linje med lutning $-p$
- $\omega = z_i$: lutningen ändras $+1$
- $\omega = p_i$: lutningen ändras -1
- stora ω : lutning $m - p - n$

Bodediagram - Allmänt

- Faskurva:

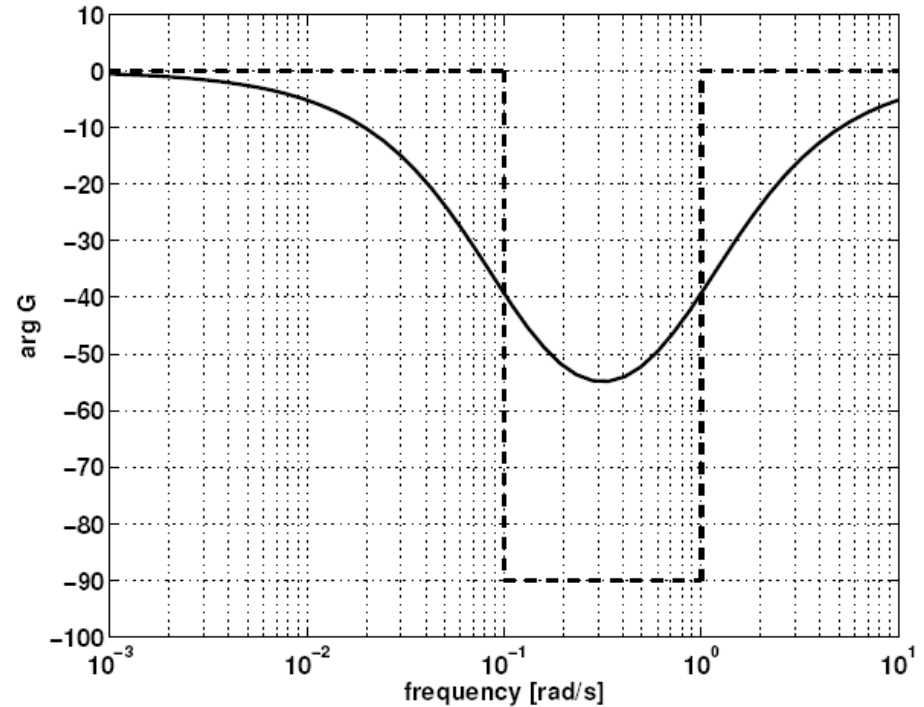
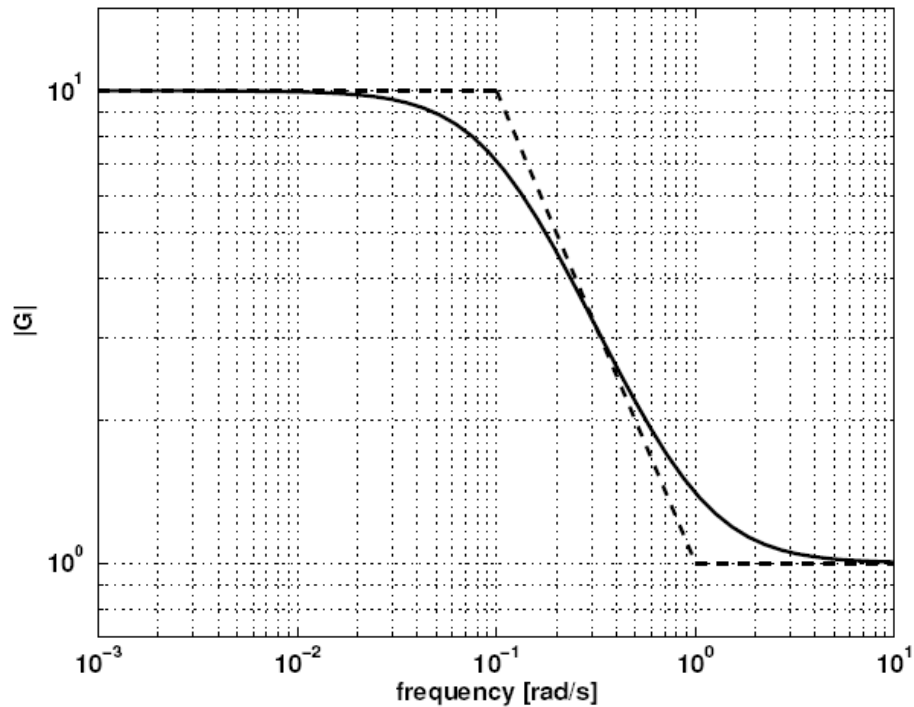
$$\arg G(i\omega) = \arg K + \operatorname{atan}\frac{\omega}{z_1} + \dots - p \cdot 90^\circ - \operatorname{atan}\frac{\omega}{p_1} - \dots$$

- asymptotiskt:

- små ω : $\arg G = -p \cdot 90^\circ$.
- $\omega = z_i$: fasen ändras med $+90^\circ$.
- $\omega = p_i$: fasen ändras med -90° .
- stora ω : $\arg G = (m - p - n) \cdot 90^\circ$.

Bodediagram - Exempel

$$G(s) = 10 \frac{s + 1}{10s + 1}$$



Ex.4: Bodediagram för system med komplexa poler

- System med komplexa poler:

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad \text{poler : } s_{1,2} = -\omega_0 \left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

- Frekvenssvaret:

$$G(i\omega) = \frac{1}{\left(\frac{i\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta \frac{i\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + i2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}$$

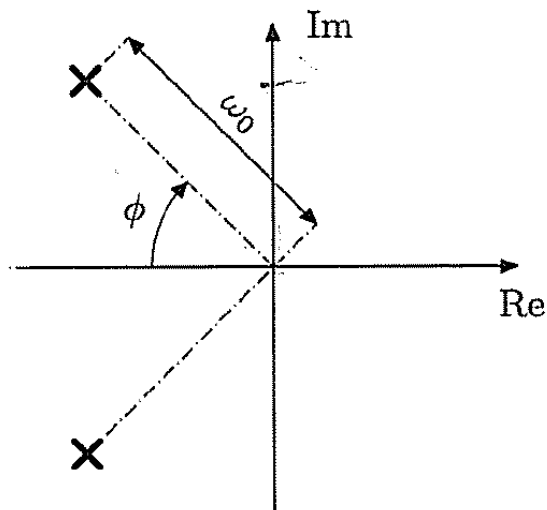
- Amplitud:

$$|G| = 1 / \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

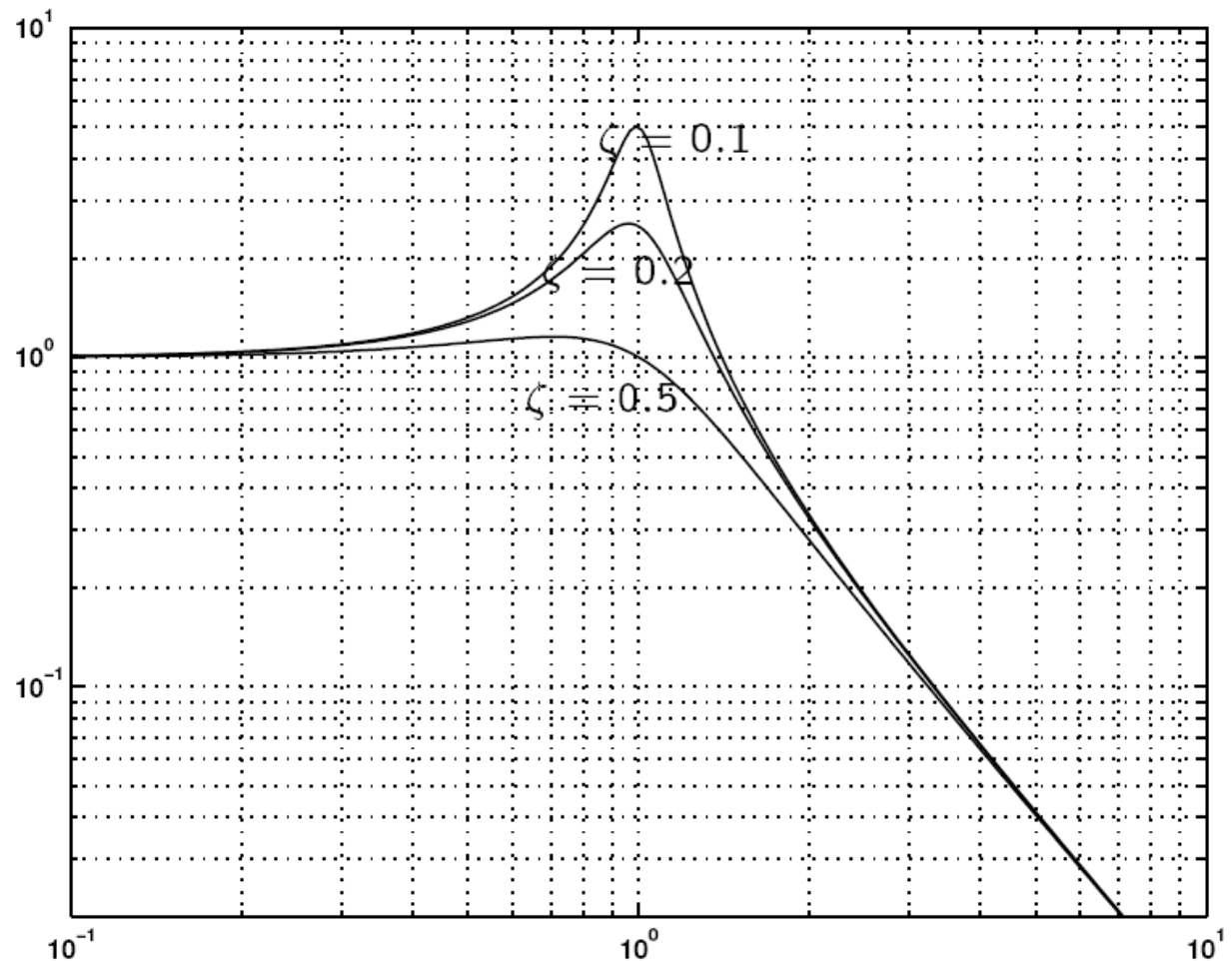
- ★ små ω : $|G| \approx 1$.
- ★ stora ω : $|G| \approx 1/\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, dvs. lutning -2.
- ★ $\omega = \omega_0$: $|G| = \frac{1}{2\zeta}$, dvs. resonanstopp då ζ litet!

Bodediagram – Amplitud, komplexa poler

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1} ; \quad (\omega_0 = 1)$$

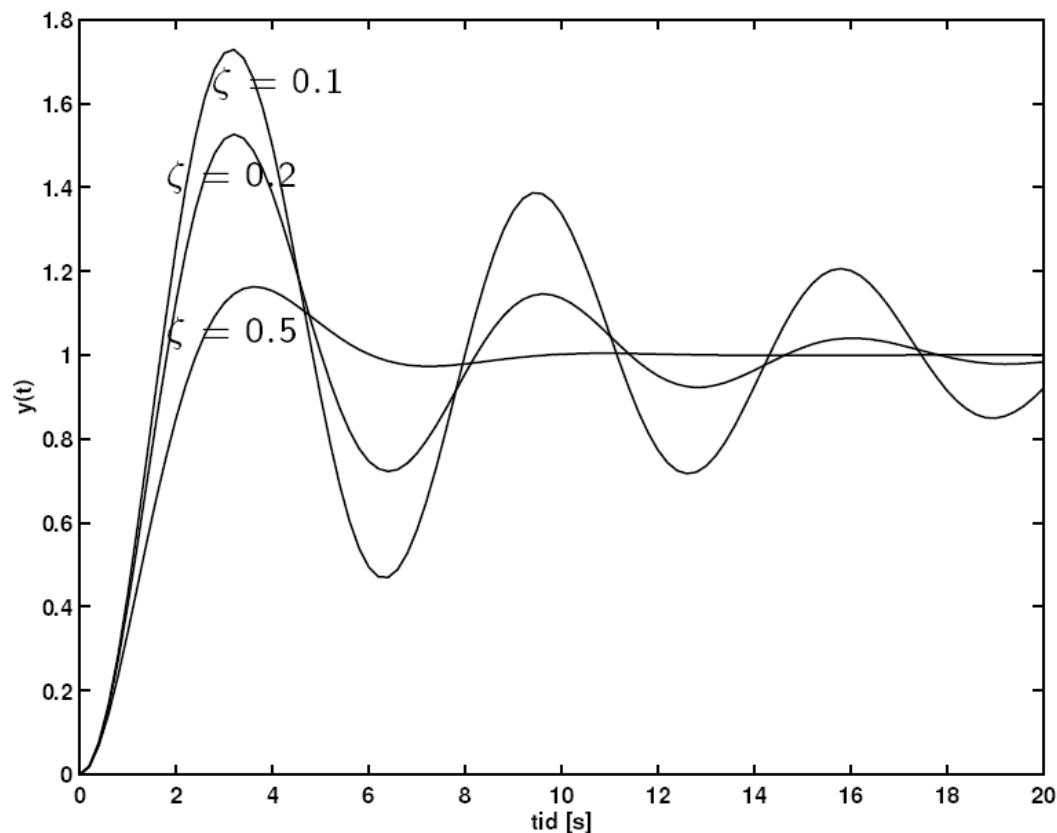


$\cos \phi = \zeta \in [0, 1]$
(relativ dämpning)



Bodediagram – Amplitud, komplexa poler

Motsvarande stegsvar: $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{1}{s} \right\}$

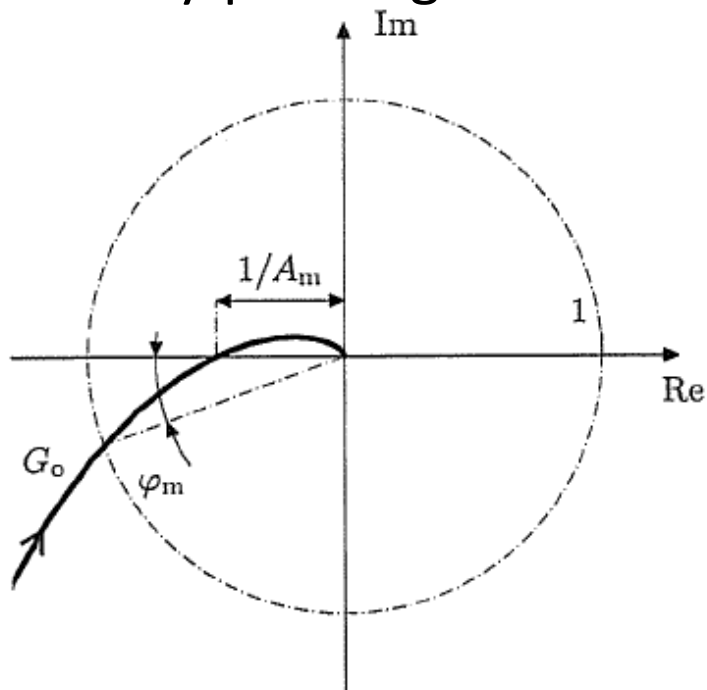


Komplexa poler ger:

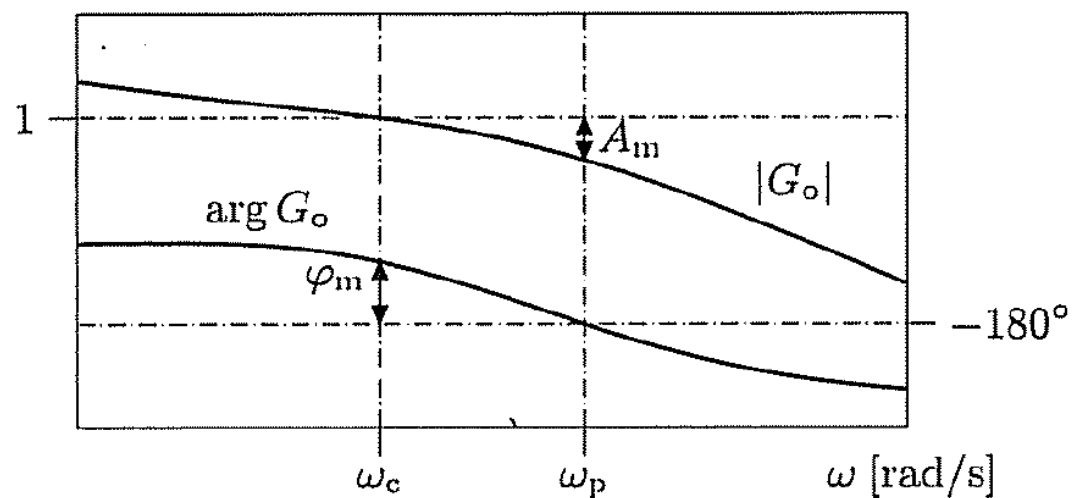
- Svängningar i stegsvar
- Resonanstopp i Bodediagram

Amplitud- och fasmarginal

Nyquistdiagram



Bodediagram

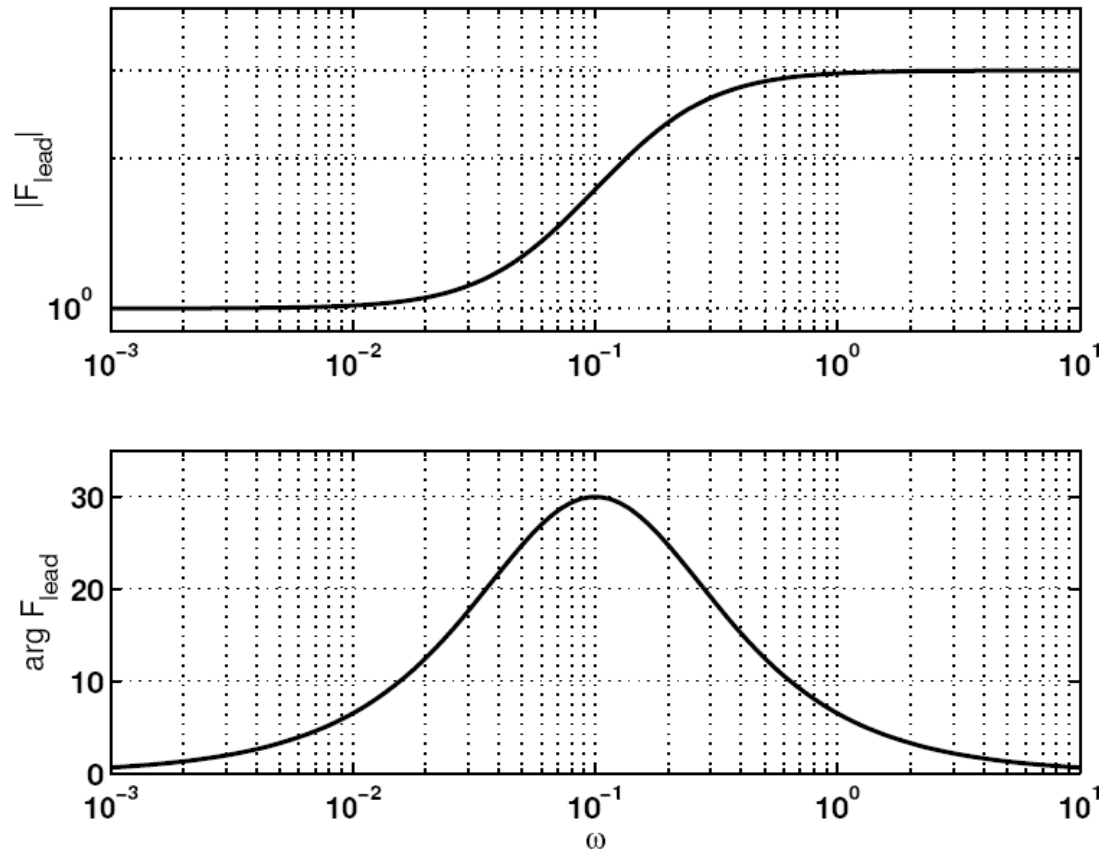


Fas-skärfrekvens ω_p och amplitudmarginal A_m

Skärfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m

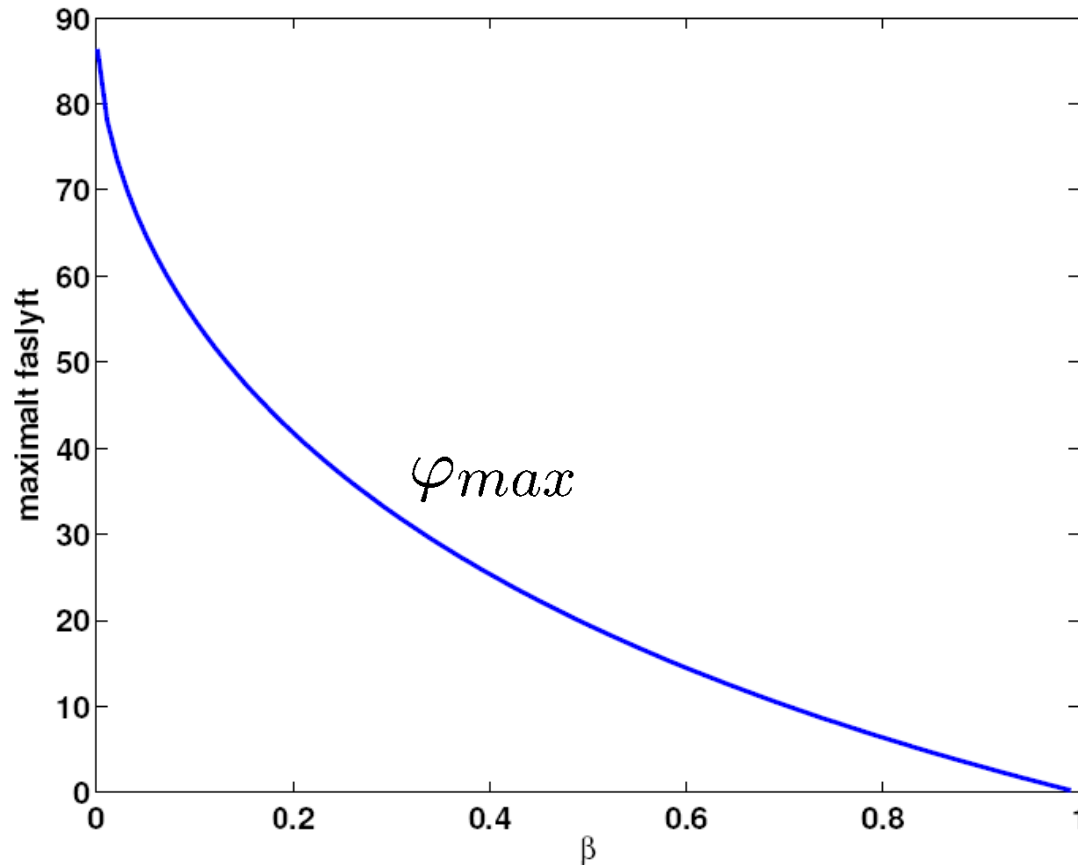
Kompensering med PD-länk ("lead-länk")

$$\omega_c = 0.1, \varphi_{\max} = 30^\circ \Rightarrow \beta = 0.33, \tau_D = 17.2$$



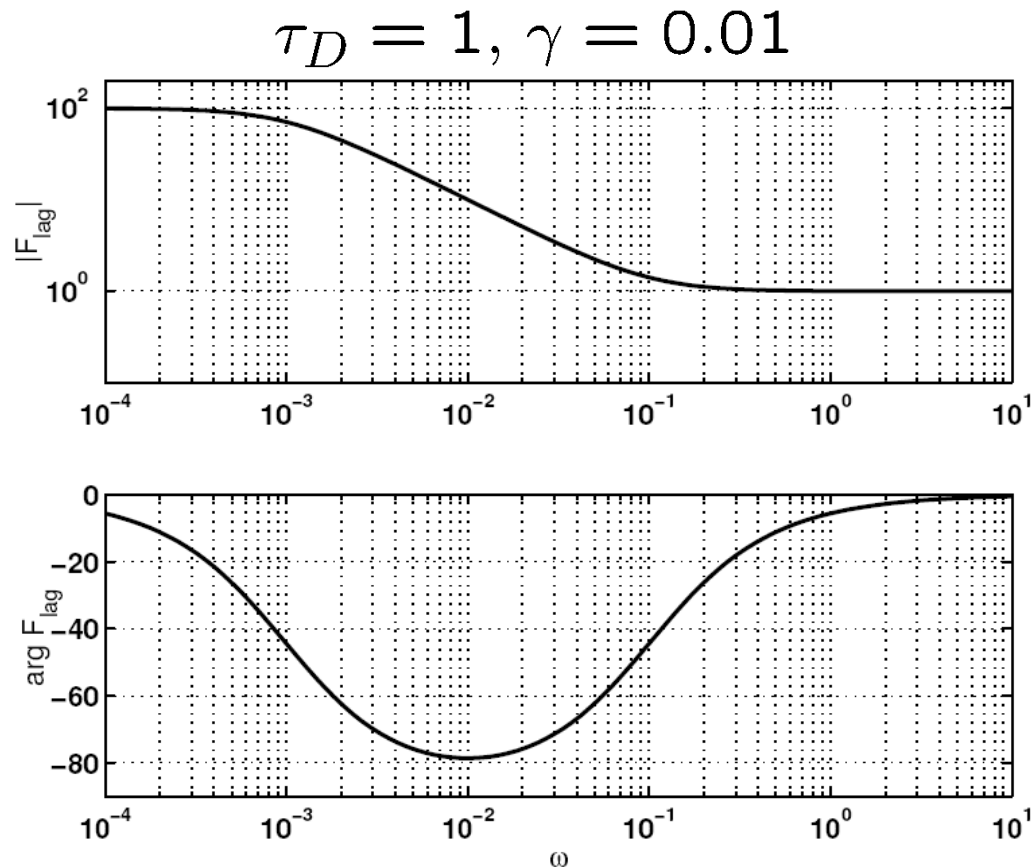
- fördel: positivt fasbidrag (faslyft)
- nackdel: stor förstärkning vid höga frekvenser

Maximalt faslyft



- använd paramtern τ_D för att få maximalt faslyft vid önskat frekvens (skärfrekvensen)
- stora faslyft $\rightarrow$ litet $\beta \rightarrow$ stor högfrekvent förstärkning $1/\beta$

Kompensering med PI-länk ("lag-länk")



- fördel: ger stor lågfrekvent förstärkning
- nackdel: ger negativt fasbidrag