Differentialekvationer

Många system kan beskrivas väl med hjälp av differentialekvationer. I denna kurs behandlar vi system som kan beskrivas av linjära differentialekvationer, d.v.s.

$$\frac{d^n y}{dt^n}(t) + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^n u}{dt^n}(t) + b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + b_n u(t) \quad (1)$$

Lösningen till en linjär differentialekvation kan delas upp i två delar, en homogen lösning y_H och en partikulärlösning y_P,

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t). \quad (2)$$

Den homogena lösningen får man genom att lösa

$$\frac{d^n y_H}{dt^n}(t) + a_1 \frac{d^{n-1} y_H}{dt^{n-1}}(t) + \ldots + a_n y_H(t) = 0,$$

d.v.s. genom att sätta högerledet i (1) till noll. Lösningen får man fram genom att sätta in ansatsen $y = e^{\lambda t}$ vilket leder till

$$\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_n\right) e^{\lambda t} = 0$$

vilket i sin tur leder till den s.k. karakteristiska ekvationen[1]

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \ldots + a_n \quad (3)$$

Den homogena lösningen ges av[2]

$$y_H(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t}, \quad (4)$$

där λ_i är rötter till den karakteriska ekvationen (3). Vi kan se att om alla rötter λ_i är negativa kommer y_H att gå mot noll[3], d.v.s. i detta fall kommer $y(t)$ efter tillräckligt lång tid ges av partikulärlösningen y_P. I det allmänna fallet kan rötterna till (3) vara komplexa. Viktigt att komma ihåg är att komplexa rötter alltid förekommer i komplexkonjugerad par om koefficienterna till differentialekvationen är reella. Alltså, om vi har en rot $\lambda_i = \alpha + i\beta$ måste det finnas en rot $\lambda_{i+1} = \alpha - i\beta$, d.v.s. $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm i\beta$. För dessa rötter gäller att

$$C_i e^{\lambda_i t} + C_{i+1} e^{\lambda_{i+1} t} = e^{\alpha t}\left(C_i e^{i\beta t} + C_{i+1} e^{-i\beta t}\right)$$

vilket kan skrivas om till

$$e^{\alpha t}\left(C'_i \sin(\beta t) + C'_{i+1} \cos(\beta t)\right).$$

Denna signal består av två faktorer, den ena (den inom parentesen) är en sinussvängning och den andra bestämmer amplituden på denna svängning. Om $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$ kommer signalen att detta uttryck att gå mot noll. Allstå kan vi generellt säga att om $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$ för alla rötter till (3) så kommer den homogena lösningen att klinga av. Därför kallas denna lösning också för transienten.

Överföringsfunktionen

Ett kraftfullt hjälpmedel vid lösning av differentialekvationer är Laplacetransformen som definieras enligt

$$\mathcal{L}[y](s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} ds = Y(s).$$

[1] $e^{\lambda t} \neq 0 \; \forall t$

[2] Om man antar att det bara finns enkla rötter till (3)

[3] $e^{\lambda_i t} \to 0 \; \forall \; \lambda < 0$

Om man Laplacetransformerar hela differentialekvationen ovan under antagandet att systemet befinner sig i vila vid $t = 0$,

$$\frac{d^n y}{dt^n}(0) = 0, \quad \dots y(0) = 0, \quad \frac{d^n u}{dt^n}(0) = 0, \quad \dots u(0) = 0$$

får man

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)Y(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n)U(s)$$

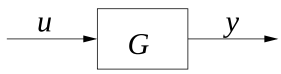
vilket kan skrivas som

$$Y(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} U(s) = G(s)U(s)$$

där $G(s)$ kallas **överföringsfunktion**. Sambandet mellan y och u kan alltså skrivas

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

I ett blockschema kan detta samband ritas som i Figur 1.



Figur 1: Blockdiagram som åskådliggör sambandet $Y(s) = G(s)U(s)$.

Rötterna till täljararpolynom ($\sum_0^n b_i s^{n-i} = 0$) för $G(s)$ kallas **nollställen**, och rötterna till motsvarande nämnarpolynom ($s^n + \sum_1^{n-1} a_i s^{n-i} = 0$) kallas **poler**. Jämför med rötterna till den karakteristiska ekvationen för motsvarande homogena differentialekvation.
Laplacetransformer för de vanligaste funktionerna finns i appendix till kursboken.

Viktsfunktionen

En annan egenskap som Laplacetransformen har är att en faltning i tidsplanet motsvaras av multiplikation i Laplace-planet,

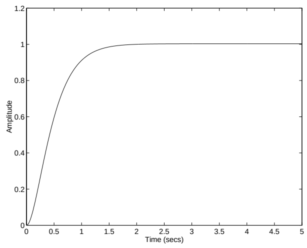
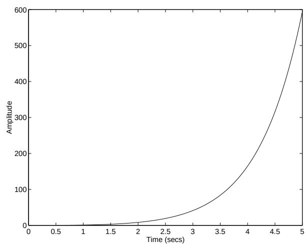
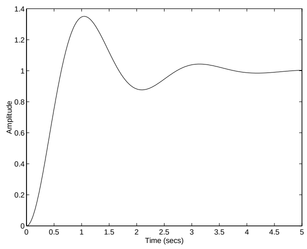
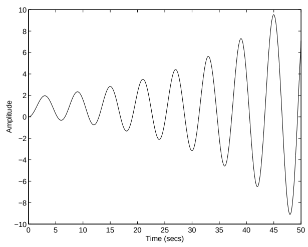
$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \Rightarrow \mathcal{L} \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

där $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G](t)$. $g(t)$ kallas **viktsfunktionen** därför att den anger hur stor vikt man skall lägga till varje gammal insignal när man beräknar utsignalen. Viktsfunktionen kallas också **impulssvaret** eftersom det gäller att $y(t) = g(t)$ om $u(t) = \delta(t)$, d.v.s. att insignalen, $u(t)$, är en impuls. Om man vill bestämma inverstransformen till en funktion kan man använda samma tabell i kursbokens appendix som för att bestämma transformen men man läser den från höger till vänster istället.

Polerna

Systemets uppförande beror till stor del på var polerna ligger. Om vi låter polerna betecknas med λ_i visar följande tabell det typiska uppförande vid ett stegsvarsexperiment för olika lägen på polerna.

- **Asymptotiskt stabilt**
  $y(t) \to 0$ om $u(t) = 0$, oavsett begynnelsevillkor, när
  $Re(\lambda_i) < 0$ för alla i
- **Instabilt**
  $y(t) \to \infty$ även om $u(t) = 0$, för något begynnelsevillkor, när
  $Re(\lambda_i) > 0$ för något i

Asymptotiskt stabilt	Instabilt
alla $\lambda_i < 0 \in \mathcal{R}e$	$\lambda_i \in \mathcal{R}$ någon $\lambda_i > 0$
	
$Im\{\lambda_i\} \neq 0$, alla $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0$	$Im\{\lambda_i\} \neq 0$, någon $\mathcal{R}e\{\lambda_i\} > 0$
	

Ett system med alla poler på den imaginära axeln är helt odämpat och kommer att svänga för alltid. Om polerna på imaginära axeln är enkla, så är systemet stabilt (dock ej asymptotiskt stabilt). När man säger att ett system är stabilt, så menas det i reglerteknik insignal-utsignal stabilt. Asymptotiskt stabilitet (d.v.s. alla poler strikt i vänster halvplan) medför insignal-utsignal stabilitet.

Slutvärdesteoremet

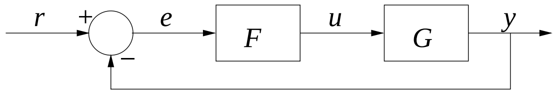
Ofta är man intresserad av att kunna tala om hur systemet kommer att uppföra sig när det nått stationärt tillstånd, d.v.s. då det inte längre ändrar sig. För att studera stationärt tillstånd brukar man titta då $t \to \infty$. Har systemet inte lugnat ner sig då, lugnar det aldrig ner sig! Till sin hjälp har man då **slutvärdesteoremet** som säger att om $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar så gäller

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Kravet för att få använda slutvärdesteoremet kan också formuleras så att $Y(s)$ måste ha sina poler i VHP (kan tillåta en pol i origo) eller att $y(t)$ är asympotiskt stabil.

Återkoppling

När man skall reglera ett system känns det ganska naturligt att titta på vad som kommer ut ur systemet när man skall välja insignal. När vi kör bil håller de flesta av oss blicken på vägen för att kunna välja styrvinkel på ratten för att bilen skall hålla sig på vägen. Gör vi inte det brukar det sluta illa. Ett annat exempel är farthållningen på en bil. Om vi vill köra en viss hastighet tittar vi på hastighetsmätaren och trycker på gasen om vi kör för långsamt och släpper om vi kör för fort.



Figur 2: Genom återkoppling kan vi ändra ett systems egenskaper. I blockdiagrammet är $e = r - y$ det s.k. reglerfelet. F är vår regulator som i fallet med hastighetshållning av en bil är något som trycker på gasen när e är större än noll, d.v.s. vi kör för långsamt och släpper på gasen när e är mindre än noll.

Genom återkoppling kan vi förändra ett systems egenskaper. Vi kanske vill göra det snabbare och/eller stabilare. Återkoppling gör också att vi inte behöver veta lika mycket om systemet vi skall reglera. Skulle vi använda s.k. öppen styrning skulle vi behöva veta exakt vilket gaspådrag som behövs för en viss hastighet. För att klara detta måste man dessutom t.ex. veta hur mycket och i vilken riktning det blåser ute och vilket luftmostånd bilar har.

PID-Regulatorn

En enkel regulator fås genom att låta styrsignalen vara **p**roportionell mot reglerfelet $e = r - y$,

$$u(t) = K(r(t) - y(t)) = Ke(t) \tag{5}$$

där $r(t)$ är referenssignalen och $e(t)$ är reglerfelet.

Med en P-regulator kan man gör ett system snabbare, men när man ökar förstärkningen (K_P) för mycket kan man få problem men instabilitet. I många fall kommer man också att få ett kvarstående, stationärt, reglerfel, d.v.s. e kommer inte att gå mot 0 vilket alltså betyder att utsignal y inte kommer att nå den önskade signalen r.

En mer generell regulatorkonstruktion är den s.k. PID-regulatorn där man utöver den **P**roportionella verkan också har **I** ntegrerande och **D**eriverande regulatorverkan. PID-regulatorn kan skrivas

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_D\frac{de(t)}{dt}\right). \tag{6}$$

Om vi applicerar Laplace-operatorn på (6) får vi fram överföringsfunktionen

$$\begin{aligned} U(s) &= K\left(E(s) + \frac{1}{sT_I}E(s) + T_D sE(s)\right) = F(s)E(s) \\ \Rightarrow\ F(s) &= K\left(1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D\right). \end{aligned}$$

PID-regulatorn har 3 "rattar", K, T_I och T_D.

- **P**roportionell återkoppling
  Använder felet just nu
  Genom att öka K_P blir systemet snabbare, men stabiliteten minskar
- **I**ntegrerande återkoppling
  Använder felen som varit
  Integrerande verkan tar bort stationära fel och gör systemet snabbare, men ger sämre stabilitet. Att det stationära felet försvinner när man använder integrerande verkan kan man inse genom följande resonemang. I stationärt tillstånd gäller att utsignalen y är konstant. För att detta skall kunna uppnås måste styrsignalen också vara konstant. Om inte felet e är noll kommer integraltermen att ändra värde och därmed styrsignalen u. Alltså måste felet bli noll till slut. Man måste i praktiken också tänka på att man kan råka ut för integratoruppvridning (se LAB1).
- **D**eriverande återkoppling
  Försöker predikera framtida fel och använda det. Åtminstone för små T_D gäller ju t.ex. att $e(t+T_D) \approx e(t) + T_D\frac{de(t)}{dt}$, d.v.s. T_D kan ses som en prediktionshorisont. Deriverande verkan stabiliserar systemet genom att gör det långsammare. Som vi ser från ekvationen motverkas ju alla förändring i systemet av D-delen. Då felet blir mindre (derivatan negativ) minskar D-delen styrsignalen vilket får till följd att felet minskar långsammare, d.v.s. systemet bromsar in.

Försöker man ställa in parametrarna för en PID-regulator ser man snart att det är ganska svårt. Detta beror på att verkan från de tre delarna är kopplade. Ökar man t.ex. T_D rör sig systemet långsammare upp mot slutvärdet. Detta betyder i sin tur att integraltermen hinner växa sig större vilket betyder att man riskerar att få större översläng än med ett mindre T_D (se LAB1).