

Lösningar till Tentamen i Reglerteknik AK EL1000/EL1100/EL1120 2009-06-10

1a. Ansätt: $G(s) = \frac{b}{s+a}$, $b > 0$, $a > 0$. Utsignalen ges av

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)), \quad \omega = 2$$

$$|G(i\omega)| = \frac{b}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = 2$$

$$\arg G(i\omega) = \arg b - \arg(i\omega + a) = -\arctan \frac{\omega}{a} = -\frac{\pi}{4}.$$

För $\omega = 2$ fås $a = 2$ och $b = 4\sqrt{2}$. Den statiska förstärkningen blir då

$$G(0) = 2\sqrt{2}$$

och systemets pol finns i

$$s + 2 = 0 \Leftrightarrow s = -2.$$

1b. Med en P-regulator med förstärkning K blir krets förstärkningen

$$G_o(s) = \frac{10K}{s(1+10s)^2}.$$

Amplitudmarginalen är

$$A_m = \frac{1}{|G_o(i\omega_p)|},$$

där ω_p ges av

$$\arg G_o(i\omega_p) = -\pi \Rightarrow \omega_p = 0.1$$

Vill ha amplitudmarginal $A_m = 2$, det vill säga

$$\frac{1}{|G_o(0.1i)|} = 2 \Rightarrow K = 0.01$$

1c. Systemet med tillståndsåterkoppling är

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) &= -Lx(t) + r(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$\text{med } A = \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], L = [l_1 \quad l_2].$$

Det återkopplade systemets poler ges av

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (1 + l_1)\lambda + l_2 - 12 = 0.$$

Vill att polerna ska hamna i $-2 \pm 4i$, det vill säga att

$$(\lambda + 2 + 4i)(\lambda + 2 - 4i) = \lambda^2 + 4\lambda + 20 = 0.$$

Genom att jämföra koefficienter fås $l_1 = 3$ och $l_2 = 32$.

1d. Linearisering av systemet ger

$$\Delta \dot{y} = -u_0 \Delta y - y_0 \Delta u$$

vilket för den stationära punkten $(1, 1)$ blir

$$\Delta \dot{y} = -\Delta y - \Delta u.$$

2a. The closed loop system

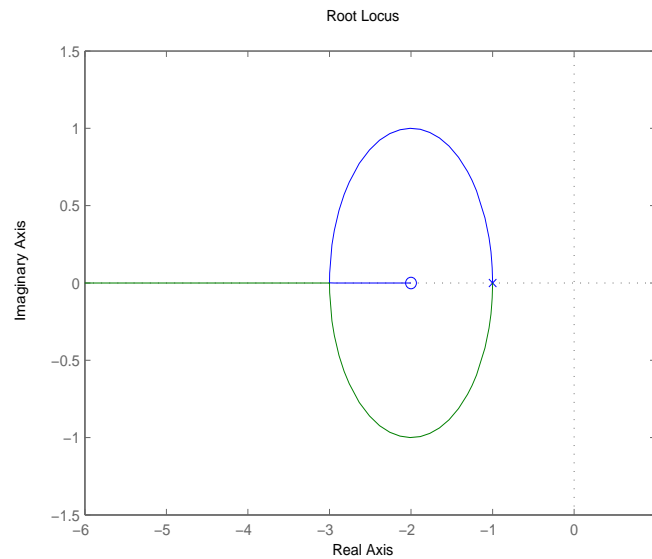


Figure 1: root locus of problem 2.a

$$G_c(s) = \frac{G(s)K}{1 + G(s)K} = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2 + K(s+2)}$$

has the characteristic equation

$$(s+1)^2 + K(s+2) = 0$$

which gives

$$P(s) = (s+1)^2 \quad Q(s) = s+2$$

- Starting points \iff Zeros of $P(s)$: -1,-1
End points \iff Zeros of $Q(s)$: -2
- Number of asymptotes: $2 - 1 = 1$
Direction: π
Intersection point: $-1 - 1 + 2 = 0$
- Real axis: $(-\infty, -2]$ belongs to the root locus
- Intersection with the imaginary axis, set $s = j\omega$:

$$(j\omega + 1)^2 + K(j\omega + 2) = 0$$

$$\text{Im} : \omega(2 + K) = 0$$

$$\text{Re} : -\omega^2 + 1 + 2K = 0$$

$$\implies \omega = 0, K = -\frac{1}{2}$$

which does not meet $K > 0$.

Intersection with the real axis, set $s = j\omega$:

$$\begin{aligned}(j\omega + a)^2 &= (j\omega + 1)^2 + K(j\omega + 2) \\ \implies (K = 0, a = 1), (K = 4, a = 3)\end{aligned}$$

This gives the root locus in Figure 1. The system is asymptotically stable. $K = 4$ (pole position -3) gives the fastest step response without fluctuations since it does not have any imaginary parts.

2b. With a similar approach in 2a, the closed loop system

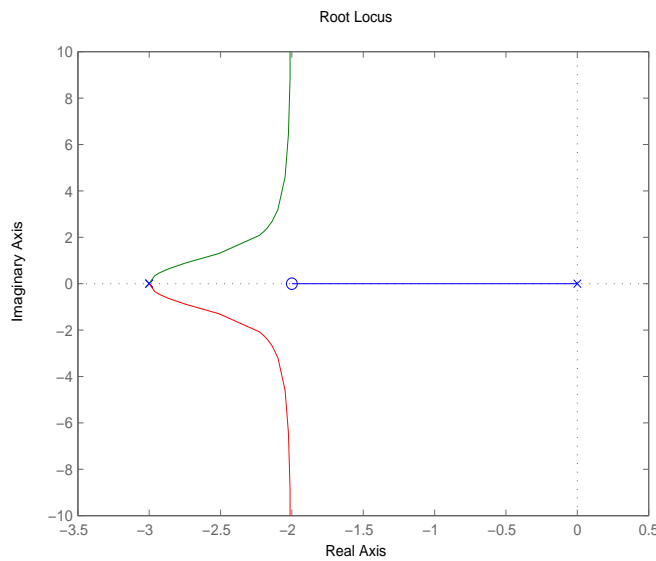


Figure 2: root locus of problem 2.b

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

where $F(s) = 4 + \frac{K_I}{s}$, $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$. The characteristic equation is

$$1 + F(s)G(s) = s(s+1)^2 + (4s + K_I)(s+2) = 0$$

which gives

$$P(s) = s(s+1)^2 + 4s(s+2) = s(s+3)^2 \quad Q(s) = K_I(s+2)$$

- Starting points \iff Zeros of $P(s)$: 0, -3, -3
- End points \iff Zeros of $Q(s)$: -2
- Number of asymptotes: $3 - 1 = 2$
- Direction: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
- Intersection point: $\frac{0-3-3+2}{2} = -2$

- Intersection with the imaginary axis, set $s = j\omega$:

$$j\omega(j\omega + 3)^2 + K_I(j\omega + 2) = 0$$

$$\text{Im} : \omega(-\omega^2 + K_I + 9) = 0$$

$$\text{Re} : -6\omega^2 + 2K_I = 0$$

$$\implies (\omega = 0, K = 0), (\omega^2 = K_I + 9, K_I = -\frac{54}{4} < -9) : \text{not real}$$

which does not meet $K_I > 0$.

This gives the root locus in Figure 2.b. The system is asymptotically stable.

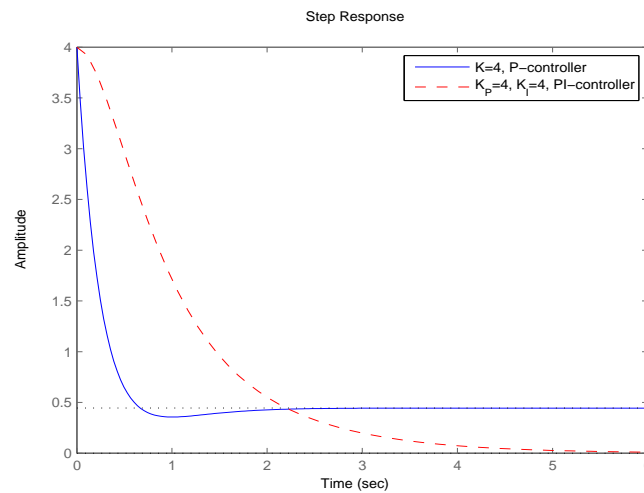


Figure 3: step response of problem 2.a, 2.b

- 2c.** The P-controller of 2.a) gives the faster step response than PI-controller of 2.b) since the dominant pole $[-2, 0]$ is slower than -3 . However, there is stationary error of P-controller, see Figure 3.

3. Systemet $G(s) = \frac{2}{s+1}e^{-0.25s}$ regleras med en P-regulator med $K = 1/\sqrt{2}$. Skärfrekvensen ω_c ges av

$$1 = |KG(i\omega_c)| = \frac{2K}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}} \Rightarrow 4K^2 = \omega_c^2 + 1 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{4K^2 - 1} = 1.$$

Fasmarginalen φ_m ges av

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \pi + \arg(KG(i\omega_c)) = \pi - 0.25\omega_c - \arctan \omega_c = \\ &= \pi - 0.25 - \arctan 1 = \frac{3\pi - 1}{4} \approx 121^\circ.\end{aligned}$$

Vi vill bestämma en lead-lag-regulator $F(s)$ som ger dubbla skärfrekvensen och samma fasmarginal. Vid $\omega_{c,ny} = 2$ är fasmarginalen

$$\varphi_{m,ny} = \pi + \arg G(2i) = \pi - 0.5 - \arctan 2 \approx 88^\circ.$$

Det innebär att vi måste höja fasen med

$$\Delta\varphi_m = 121^\circ - 88^\circ + 6^\circ = 39^\circ,$$

med 6° för lag-länk. Det ger

$$\beta = \frac{1 - \sin(\Delta\varphi_m)}{1 + \sin(\Delta\varphi_m)} = 0.2, \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_{c,ny}\sqrt{\beta}} = 1.1.$$

Då har vi $F_{lead} = \frac{1+\tau_D s}{1+\beta\tau_D s}$.

För att få rätt skärfrekvens bestämmer vi ett K' så att

$$1 = |K'F_{lead}(i\omega_c)G(i\omega_c)| = 2K' \frac{1}{\sqrt{\beta(\omega_{c,ny}^2 + 1)}} = 2K' \sqrt{\frac{1}{5\beta}} = 2K' \Rightarrow K' = \frac{1}{2}$$

Det stationära felet måste vara mindre än 0.05 när referensen är ett steg. Vi lägger till en lag-länk $F_{lag} = \frac{1+\tau_I s}{\tau_I s + \gamma}$, där $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,ny}} = 5$ och γ bestäms så att

$$\frac{1}{1 + K'F_{lead}(0)F_{lag}(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 2K'/\gamma} \leq 0.05 \Rightarrow \gamma \leq \frac{2K'}{19} = 0.05$$

Svar

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{1 + \tau_D s}{1 + \beta\tau_D s} \frac{1 + \tau_I s}{\tau_I s + \gamma}$$

med

$$\beta = 0.2, \quad \tau_D = 1.1, \quad \tau_I = 5, \quad \gamma = 0.05,$$

- 4a. Känslighetsfunktionen $S(s)$ är överföringsfunktionen från störning $v(t)$ till utsignal $y(t)$, som illustreras i Fig 4. Motsvarande Laplace relationer för

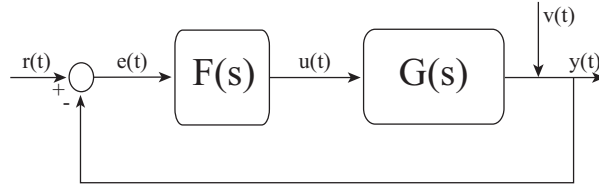


Figure 4: Block Diagram in Ex.2.

de två regulatorerna är

$$\begin{aligned} \text{PI: } U(s) &= \left(K_p + \frac{K_I}{s}\right) E(s) = F_{\text{PI}}(s)E(s) \\ \text{IP: } U(s) &= -K_p Y(s) + \frac{K_I}{s} E(s) = F_{\text{PI}}(s)E(s) - K_p R(s), \end{aligned}$$

med $\bar{K}_p = K_p$ och $\bar{K}_I = K_I$.

Studera först PI regulatorn

$$Y(s) = \frac{F_{\text{PI}}(s)G(s)}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)}V(s)$$

vilket medför att $S_{\text{PI}}(s)$ är

$$S_{\text{PI}}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} \Big|_{R(s)=0} = \frac{1}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)} = \frac{s(s+1)}{s(s+1) + K_p s + K_I}$$

Motsvarande för IP regulatorn:

$$Y(s) = \frac{(F_{\text{PI}}(s) - K_p)G(s)}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)}V(s)$$

vilket ger $S_{\text{IP}}(s)$

$$\begin{aligned} S_{\text{IP}}(s) &= S_{\text{PI}}(s) = \frac{1}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)} = \frac{s(s+1)}{(s+0.5)(s+10.5)} \\ &= \frac{5.25s(1+s)}{(1+s/0.5)(1+s/10.5)} \end{aligned}$$

Detta bör inte vara någon överraskning efter det bara är en skillnad på hur referenssignalen $R(s)$ behandlas. Båda regulatorerna ger

$$|S(i\omega)| = \omega \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(1 + \omega^2/0.5)(1 + \omega^2/10.5)}}$$

för vilket $|S(i\omega)| \leq |S(i\infty)| \leq 1 \forall \omega$. Detta innebär att alla störningar undertrycks.

- 4b. För PI regulatorn:

$$U(s) = F_{\text{PI}}(s)E(s) = F_{\text{PI}}(s) \left(1 - \frac{F_{\text{PI}}(s)G(s)}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)}\right) R(s) = \frac{F_{\text{PI}}(s)}{1 + F_{\text{PI}}(s)G(s)} R(s),$$

och

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{F_{PI}(s)}{1 + F_{PI}(s)G(s)} = \frac{(10s + 21/4)(s + 1)}{(s + 1/2)(s + 10.5)}.$$

Nu är $|G_{ru}(i\omega)| \approx 1$ för låga frekvenser och 10 för höga frekvenser. För IP regulatorm

$$U(s) = F_{PI}(s)E(s) - K_p R(s) = \left(\frac{F_{PI}(s)}{1 + F_{PI}(s)G(s)} - K_p \right) R(s),$$

och

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ru}(s) &= G_{ru}(s) - K_p = \frac{(10s + 21/4)(s + 1)}{(s + 1/2)(s + 10.5)} - 10 \\ &= \frac{-94.75s - 47.25}{(s + 0.5)(s + 10.5)}. \end{aligned}$$

Detta innebär att $|\bar{G}_{ru}(0)| = 9$ och $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\bar{G}_{ru}(i\omega)| = 0$. Vi får mycket lägre förstärkning av höga frekvenser än för PI regulatorm, men på bekostnad av högre förstärkning av låga frekvenser.

5a. Let $H(s) = \frac{1}{G(s)}$ denote the nominal part $H_0(s)$, and $G(s)$ be the nominal part in the model $G_0(s) = G(s)(1 + \Delta G(s))$. Furthermore, assume that the nominal characteristic equation for $H_0(s)$ never satisfies $1 + F(s)H(s) = 0$, i.e. $1 + \frac{F(s)}{G(s)} \neq 0$. If the system has to have stability robustness, the characteristic equation with the uncertain model must not go to zero for an real frequency and ΔG . This requirement can be written as

$$1 + F(i\omega)H_0(i\omega) \neq 0 \quad \rightarrow \quad 1 + F(i\omega)\frac{1}{G(i\omega)(1 + \Delta G(i\omega))} \neq 0,$$

which can be rearranged as

$$\left(1 + \frac{F(i\omega)}{G(i\omega)}\right) (1 + S(i\omega)\Delta G(i\omega)) \neq 0$$

where $S(i\omega) = \frac{1}{1 + \frac{F(i\omega)}{G(i\omega)}}$ is the sensitivity function for the system $H_0(s)$.

Since the nominal system is stable, i.e. $1 + \frac{F(i\omega)}{G(i\omega)} \neq 0$, then it is necessary and sufficient that

$$|S(i\omega)\Delta G(i\omega)| < 1 \quad \text{hence,} \quad |S(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|}$$

5b. Comparing the relation $G_0(s) = G(s)\frac{s+a}{s+a/M}$ with the first model we have

$$1 + \Delta G(s) = \frac{s+a}{s+a/M} \quad \text{hence} \quad \frac{1}{\Delta G(s)} = \frac{M}{a(M-1)}(s+a/M)$$

Using the second model we instead obtain

$$\frac{1}{1 + \Delta_I G(s)} = \frac{s+a}{s+a/M} \quad \text{hence} \quad \frac{1}{\Delta_I G(s)} = \frac{M}{a(1-M)}(s+a)$$

The Bode diagram for both models is characterized by a first order term, where the breakpoint of the as showed in Fig. 5. The model error $\frac{1}{\Delta G(s)}$ has smaller static gain and a lower break point (M times smaller) than $\frac{1}{\Delta_I G(s)}$, thus resulting in a better accuracy at low frequencies.

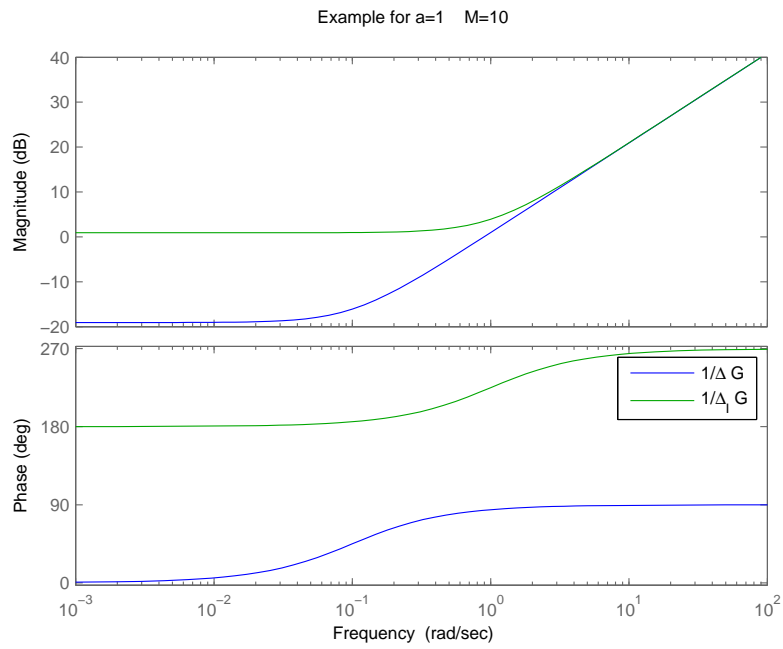


Figure 5: Bode diagram in Ex. 5b for $a=1$ and $M=10$.