Svar / lösningar till Tentamen i Reglerteknik AK EL1000/EL1100/EL1120 2009-10-20

1a. (i) Det slutna systemet

$$G_c = \frac{GF}{1+GF} = \frac{K_c(1-s)}{s^2+(1-K_c)s+1+K_c}$$

dvs. polpolynom $s^2+(1-K_c)s+1+K_c$ och ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att polerna ligger i vänste halvplan är att koefficenterna har samma tecken, dvs.

$$-1 < K_c < 1$$

(ii) Amplitudmarginal 2 motsvarar $K_c = 0.5$, och $E/V = S = -1/(1+FG)$, eller

$$\frac{E}{V} = -\frac{s^2+s+1}{s^2+0.5s+1.5}$$

vilket är stabilt enligt ovan och slutvärdessatsen med $V = 1/s$ ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 1/1.5 = -0.67$$

1b Överföringsfunktionen $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ ger

$$G(s) = \frac{-2s+2}{s^2+4s+2}$$

som har ett nollställe i komplexa högre halvplanet, dvs. systemet är icke-minfas.

1c Regulatorn motsvarar

$$u(t) = 50\dot{e}(t) + 10e(t)$$

och med Euler bakåt $\dot{e} \approx (e(t)-e(t-T))/T$ blir den tidsdiskreta regulatorn

$$u(t) = 10(51e(t) - 50e(t-T))$$

2a För fallen med $T_I = 10$ (I och III) förkortas polen i $G(s)$ och vi får $G_c = 3K_c/(10s+3K_c)$, dvs. ett 1:a ordningens system med tidskonstant $\tau = 10/3_Kc$. Detta motsvaras av figur A och C, där C är den snabbaste responsen motsvarande lägsta τ, dvs. största K_c: A-III, C-I. För de två återstående fallen blir slutna systemet av 2:a ordningen med komplexa poler. Polerna blir med II $s = -1.55 \pm i0.77$ och med IV $s = -0.2 \pm i0.51$. Fallet II har polerna längst från origo, dvs. är snabbast, och minst imaginärdel relativt realdel, dvs. best dämpning. Detta ger B-II och D-IV.

2b Stationärt gäller $d/dt = 0$, dvs. $T^* = 20$ och $Q^* = 400$. Linjärisering ger

$$\frac{d\Delta T}{dt} = 2T^*\Delta T(t) - \Delta Q(t) = 40\Delta T(t) - \Delta Q(t)$$

Systemet har ett egenvärde, eller pol, i $s = 40 > 0$, dvs. är instabilt i punkten. En P-Regulator

$$\Delta Q(t) = -K_c \Delta T(t)$$

ger ett slutet system med egenvärde $s = 40 + K_c$, dvs. systemet stabiliseras genom att välja $K_c < -40$.

2c Vi har $G_c = GF/(1 + GF)$, eller

$$F = \frac{1}{G}\frac{G_c}{1 - G_c} = \frac{10s + 1}{0.6}\frac{1}{s}$$

3a Amplitudmarginalen bestäms vid den frekvens där fasen till öppna systemet, dvs. $G(i\omega)$ i detta fallet, är $-180°$, dvs. på negativa reella axeln i Nyquist, motsvarande punkt D. Från tabellen $|G| = 0.9541$, dvs. $A_m = 1/|G| = 1.048$. Fasmarginalen bestäms där amplituden är 1, dvs. motsvarande punkt C där fasen ges av $atanIm/Re$, vilket ger fasen $-160°$, dvs. en fasmarginal $20°$.

3b Självsvängning uppstår då fasmarginalen = 0. Regulatorn F ger ett fasbidrag om $-2atan(T\omega)$ men påverkar ej amplituden då $|F| = 1$ för alla ω. Dvs. självsvängning då $-2atan(T\omega) = -20°$ vid $\omega = 0.4896$, vilker ger $T = 0.36$.

3c Skärfrekvensen till G för $|G| = 1$, dvs. $\omega = 0.4896$. Då fasmarginalen med $F = 1$ är $20°$ skall regulatorn lyfte fasen $50° - 20° = 30°$ vilket enligt tabell 5.13 i boken ger $\beta = 0.32$. För max faslyft vid ω_c väljs $T_D = 1/(\omega_c\sqrt{\beta}) = 3.61$. Slutligen väljs K så att $|FG(i\omega_c)| = 1$ vilket ger $K = 1/1.768 = 0.566$.

4a För systemet S_1 ger styrbar kanonisk form

$$\dot{x_1} = -2x_1(t) + u(t) \quad ; m(t) = x_1(t)$$

För S_2 är gradtal till täljare lika med gradtal till nämnare, dvs. det finns en direktterm D från styrsignal till utsignal, dvs. vi kan skriva $Y(s) = G(s)M(s) + DM(s)$ vilket ger

$$Y = \frac{-1}{s+3}M(s) + M(s)$$

och

$$\dot{x}_2 = -3x_2(t) - m(t) \quad ; y(t) = x_2(t) + m(t)$$

4b Genom att kominera tillståndsbeskrivningarna ovan får vi

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 3x_2(t)$$

$$y(t) = x_2(t) + x_1(t)$$

4c Styrbarhetsmatrisen $S = [BAB]$ blir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

som har full rang =2, dvs. systemet är styrbart. Detta kan förstås genom att u verkar direkt på tillståndet till S_1 och indirekt på tillståndet till S_2.

4d Observerbarhetsmatrisen $O = [C; CA]$ blir

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

som har rang 1, dvs. systemet inte observerbart. Detta kan relateras till att polen till S_1 kancelleras av ett motsvarane nollställe i S_2.

4e Systemet S ges av

$$G(s) = \frac{1}{s+2}\frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{s+3}$$

vilket motsvarar en tillståndrespresentation med ett tillstånd

$$\dot{x} = -3x(t)u(t) \quad ; y(t) = x(t)$$

som är minimal, observerbar ($c \neq 0$) och styrbar ($b \neq 0$).

5a Överföringsfunktionen från v till y ges av $S = 1 - G_C$. Dvs. att stegsvaret ges av $1 - y_r(t)$ där $y_r(t)$ är stegsvaret för steg i börvärdet som visat i figuren. Kortast insvängningstid för steg i börvärdet ger med andra ord också kortast insvändningstid för steg i störning på utsignalen. Regulatorn F_1 är därför att föredra.

5b Överföringsfunktionen från w till y ges av $G/(1 + GF)$. Med regulatorn F_1

$$\frac{Y}{W} = \frac{3s}{(5s+1)(s+2)}$$

och med regulatorn F_2

$$\frac{Y}{W} = \frac{0.6s}{(s+2)^2}$$

För fallet med F_1 har systemet en pol i $s = -0.2$ och en i $s = -2$, medan med F_2 är det två poler i $s = -2$. Polen i $s = -0.2$ gör systemet med F_1 avsevärt längre insvängningstid än med F_2, dvs. F_2 är att föredra. Strikt bör man även visa att polen i $s = -0.2$ bidrar signifikant till stegsvaret med F_1. Detta kan göras genom en partialbråksuppdelning av det slutna systemet med F_1

$$\frac{Y}{W} = \frac{3s}{(5s+1)(s+2)} = -\frac{1/3}{5s+1} + \frac{2/3}{s+2}$$

vilket visar att en betydande del av responsen med F_1 kommer att vara relaterat till den långsamma polen i $s = -0.2$.