REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Lösningsförslag till tentamen 2009–12–15, kl. 14.00–19.00

1. (a) Laplacetransform av (1) ger $s^2Y(s)+4sY(s)+Y(s) = U(s)$, och överföringsfunktionen blir $G(s) = Y(s)/U(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+1}$. En tillståndsmodell ges t.ex. av den styrbara kanoniska formen:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

(b) Insättning av styrlag i (1) ger

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + (1 + K_P)y(t) = K_P r(t).$$

Rouths algoritm säger att systemet är stabilt om och endast om $1 + K_P > 0$. Slutna systemet är alltså stabilt om och endast om $K_P > -1$.

(c) Det störda systemet ges av

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + (1 + K_P)y(t) = d(t),$$

och överföringsfunktionen ges av $\dfrac{Y(s)}{D(s)} = \dfrac{1}{s^2+4s+1+K_P} = G(s)$. Då $d(t) = \sin t$ och $K_P > -1$ är systemet stabilt och $y(t)$ svänger in mot en fasförskjuten sinus med amplitud

$$|G(i)| = \left|\frac{1}{-1+4i+1+K_P}\right| = \frac{1}{\sqrt{K_P^2+16}}.$$

(d) Från blockdiagramet fås $Y(s) = G_2(s)[F_2(s)Y(s) + G_1(s)U(s) + F_1(s)U(s)]$, vilket ger överföringsfunktionen $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{G_2(s)(G_1(s)+F_1(s))}{1-F_2(s)G_2(s)}$.

2. (a) D: En integrator vars stegsvar är en ramp. Ger 1. B: Nollställe i högra halvplanet vilket ger ett stegsvar som initialt går åt fel håll. Ger 5. A: Polerna till A och B är samma, vilket ger samma relativa dämpning. Ger 2. C: Polerna har relativ dämpning $\zeta = 0.15$ vilket är mindre än alla andra. Ger 4. F: Polerna har relativ dämpning $\zeta = 1$ och snabbhet $\omega_0 = 3$. Inget annat system är så snabbt. Ger 3. E: Enda systemet kvar. Ger 6.

Svar: A-2, B-5, C-4, D-1, E-6 and F-3

(b) Tillståndsmodellen ges av

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2\sin x_1 - 3x_2 + u.$$

Då $u = u_0 = 0$ är motsvarande stationära tillstånd $x_{1,0} = k\pi$, k heltal, och $x_{2,0} = 0$. (För full poäng räcker det att välja ett k, t.ex. $k = 0$.) Eftersom $\dfrac{d\sin x_1}{dx_1} = \cos x_1$ är lika med $(-1)^k$ då $x_1 = x_{1,0} = k\pi$, fås det linjäriserade systemet

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2(-1)^{k+1} & -3 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u$$
$$\Delta y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta x,$$

där Δ betecknar avvikelse från den stationära punkten som är bestämd av k.

3. (a) För att öka fasmarginalen används en PD-länk. Vid den önskade skärfrekvensen $\omega_c = 2$ rad/s är fasmarginalen $\arctan(0.041/0.328) \approx 7$ grader. Vi måste öka fasen med 43 grader för att få en fasmarginal på 50 grader. (För att kompensera för fasförlusten i (b) kan man dessutom lägga till 6 grader extra. Detta ger också full poäng.)

En fashöjning på 43 grader ger $\beta \approx 0.19$, och $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = 1.15$. Sist bestämmer vi K så att $\frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| = 1$. Eftersom $|G(i\omega_c)| = \sqrt{0.041^2 + 0.328^2} = 0.33$ fås $K = 1.32$. Den totala PD-länken blir

$$F_{PD}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 1.32\frac{1.15s + 1}{0.22s + 1}.$$

(b) För att minska stationära fel lägger vi till en lag-länk, $F_{lag}(s) = \dfrac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$. Reglerfelet för det okompenserade slutna systemet vid ett enhetssteg i referenssignalen ($R(s) = 1/s$) ges av

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)}R(s) = \frac{1}{1 + G(s)}\frac{1}{s}.$$

Det slutna okompenserade systemet är stabilt enligt Nyquistkriteriet och stationära felet vid ett enhetssteg ges av

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + G(0)} = \frac{1}{5},$$

eftersom $G(0) = 4$. Vi önskar uppnå det stationära felet $e_0 = 0.01/5 = 0.002$. För det stabila kompenserade systemet gäller då

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1 + F(0)G(0)} = \frac{1}{1 + 4K/\gamma} = 0.002,$$

eftersom den totala kompenseringslänken ges av $F(s) = F_{PD}(s)F_{lag}(s)$. Med K från (a) insatt (följdfel ger inga poängavdrag) fås $\gamma = 0.011$. Tumregeln som garanterar att fasförlusten är mindre än 6 grader ger att $\tau_I = 10/\omega_c = 5$. Den resulterande lag-länken ges av

$$F_{lag}(s) = \frac{5s+1}{5s+0.011},$$

och den totala kompenseringslänken blir

$$F(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma} = 1.32\frac{1.15s+1}{0.22s+1}\frac{5s+1}{5s+0.011}.$$

4. (a) Det slutna systemet blir $\dot{x} = (A - BL)x + Br$, med karaktäristisk ekvation

$$\det(A - BL - sI) = \begin{vmatrix} 0-s & 1 \\ -4-\ell_1 & -1-\ell_2-s \end{vmatrix} = s^2 + (1+\ell_2)s + 4 + \ell_1 = 0.$$

En dubbelpol i -5 motsvarar karaktäristiska ekvationen $(s+5)^2 = s^2+10s+25$, så vi identifierar koefficienterna:

$$\begin{cases} 1+\ell_2 = 10 \\ 4+\ell_1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_1 = 21 \\ \ell_2 = 9 \end{cases}$$

Återkopplingen blir alltså $u = -(21 \quad 9) + r$.

(b) Eftersom det slutna systemet enligt (a) är stabilt, kommer stegsvaret att konvergera mot ett stationärt tillstånd. Vi undersöker det stationära tillståndet genom att sätta derivatorna till noll (och antar ett enhetssteg, $r = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi = 1/25 \\ x_2 = \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Slutresultatet blir alltså att vajern har en vinkel $\varphi = 0.04$ (rad) och att vagnens acceleration är $-Lx + r = -21/25 + 1 \approx 0.16$ (m/s^2). Det betyder att vagnen ökar sin hastighet hela tiden, vilket inte kan pågå särskilt länge. Den kommer slå i änden av balken, och även om balken vore oändligt lång så skulle friktion och begränsningar i motorer göra att vagnen inte kan fortsätta att accelerera.

Anm: Ett bättre test vore nog att starta systemet från ett nollskilt tillstånd, t.ex. $\varphi = 0.1; \dot{\varphi} = 0$, sätta referensen till $r = 0$ och sen studera hur tillstånden konvergerar mot noll. Slutresultatet blir då en stillastående vagn och en vajer som hänger rakt ned.

(c) Med $r = 0$ blir återkopplingen $u = -L\hat{x}$, så observerare och återkoppling kan uttryckas på tillståndsform:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - BL - KC)\hat{x} + Ky \\ u &= -L\hat{x}, \end{aligned}$$

där $K = (9 \quad 12)^T$. Nu har vi ett system med en insignal, y, och en utsignal, u. Överföringsfunktionen blir

$$F(s) = -L\left(sI - (A - BL - KC)\right)^{-1} K = \frac{-105s + 75}{s^2 + 15s + 75}.$$

(d) Den andra raden av tillståndsformen för öppna systemet säger att

$$\ddot{\varphi} = -4\varphi - 1\dot{\varphi} + u.$$

Den andra termen i högerledet motsvarar friktionen; accelerationen i φ-led motverkas av en kraft som är proportionell mot hastigheten. Den koefficienten finns längst ner till höger i A-matrisen, så om den sätts till noll blir modellen friktionsfri. (Vajern svänger med konstant amplitud, utan att någonsin bromsas.)

5. (a) Största tänkbara förstärkning ger amplitudmarginalen $A_m = \frac{1}{|KG(i\omega_p)|} = 1$.

$$\arg G(i\omega_p) = -180 \Leftrightarrow \omega_p = 3 \text{ rad/s}.$$

Gränsen för stabilitet blir alltså

$$K = \frac{1}{|G(i\omega_p)|} = \frac{1}{0.05} = 20.$$

(b) Med fasmarginal som är minst 45° gäller

$$45^\circ < \varphi_m = \arg G(i\omega_c) + 180^\circ \Leftrightarrow \arg G(i\omega_c) > -135^\circ.$$

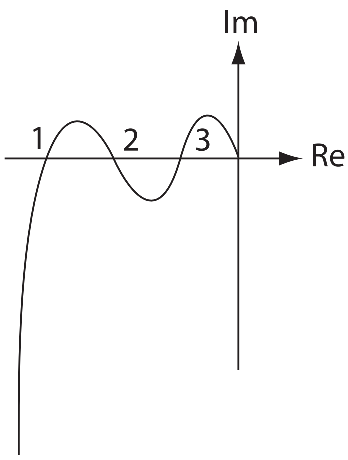
Från faskurvan fås största skärfrekvensen $\omega_c = 2$ rad/s. Bandbredden för det slutna systemet blir ungefär samma som skärfrekvensem, d.v.s. $\omega_B \approx 2$ rad/s.

(c) Med I-regulator $F(s) = \frac{K}{s}$ ändras amplitud och fas för öppna systemet enligt

$$|F(i\omega)G(i\omega)| = \left|\frac{KG(i\omega)}{i\omega}\right| = \frac{K}{\omega}|G(i\omega)|$$
$$\arg F(i\omega)G(i\omega) = \arg \frac{KG(i\omega)}{i\omega} = \arg G(i\omega) - 90^\circ$$

Fasen kommer skära -180° i tre frekvenser: $\omega_1 = 0.06$ rad/s, $\omega_2 = 0.6$ rad/s och $\omega_3 = 1.5$ rad/s. Nyquistkurvan får utseendet i Figur 1 (ej skalenligt) och enligt Nyquistkriteriet är systemet stabilt om -1 inte omsluts av kurvan. Det ger två möjligheter:

1. -1 ligger till vänster om skärningspunkt 1: $1 > \frac{K}{\omega_1}|G(i\omega_1)| = K\frac{1.8}{0.06} \Leftrightarrow K < 1/30 \approx 0.033$.
2. -1 ligger mellan skärningspunkt 2 och 3: $\frac{K}{\omega_2}|G(i\omega_2)| > 1 > \frac{K}{\omega_3}|G(i\omega_3)| \Leftrightarrow K\frac{0.1}{0.6} > 1 > K\frac{0.07}{1.5} \Leftrightarrow 6 = \frac{0.6}{0.1} < K < \frac{1.5}{0.07} \approx 21.4$



Figur 1: Nyquistdiagram för Uppgift 5(c).