Svar till Tentamen i Reglerteknik AK EL1000/1011/1012 2010-01-15

1. (a) Slutna systemet ges av

$$G_c(s) = \frac{5(s+z)}{s+1+5(s+z)}$$

och polen ges av $s = (-1-5z)/6$ som är i VHP för $z > -0.2$, dvs. stabilt för $z > -0.2$.

(b) Laplace ger

$$G(s) = \frac{3}{s+1} \; ; \quad F(s) = \frac{s+1}{s}$$

Överföringsfunktionen från börvärde till reglerfel ges av känslighetsfunktionen

$$S = \frac{1}{1+FG} = \frac{s}{s+3}$$

(i) Systemet är stabilt och slutvärdessatsen $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{s}{s+3}\frac{1}{s} = 0$, dvs. noll fel i stationäritet.

(ii) Frekvenssvaret vid $\omega = 1$ ger $|S(i1)| = \sqrt{0.1} = 0.316$ och $\arg S(i1) = 1.249$, dvs $e(t) = 0.316 sin(t + 1.249)$.

(c) Vi har

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs. observerbarhetsmatrisen

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

har full rang, systemet är observerbart och vi kan mao. skatta x_2.

2. (a) Stationäritet med $c = 1$ ger $q = 1$ och den linjäriserade modellen blir

$$\frac{d\Delta c}{dt} = \Delta c(t) - \Delta q(t)$$

vilket ger att systemet har ett egenvärde (pol) i $s = 1$ i denna punkt, mao. instabilt. Genom att välja $\Delta q(t) = -K\Delta c(t)$ och $K > 1$ blir egenvärdet negativt och systemet stabilt.

(b) Reglering av hastighet med $F_1(s) = K_1$ ger

$$G_{c1} = \frac{0.5K_1}{0.2s + 1 + 0.5K_1}$$

med pol i $s = -5 - 2.5K_1$. Placering av polen i $s = -10$ ger $K_1 = 2$. Position är integralen av hastighet och "öppna systemet" när vi sluter yttre kretsen är därför

$$G_2 = \frac{1}{s(0.2s + 2)}$$

För yttra kretsen med $F_2(s) = K_2$ får vi då

$$G_{c2} = \frac{K_2}{s(0.2s + 2) + K_2}$$

med poler

$$s = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 20K_2}}{2}$$

och kritisk dämpning, dvs. största K_2 med noll imaginärdel, erhållas med $K_2 = 5$.

Blockschema inte ritat här.

3. (a) En PI-regulator ger enbart negativt fasbidrag, därför väljs integraldelen till 0 för att maximera fasmarginalen. Den frekvens där öppna systemet har fas -130^o läsas av till $\omega_{130} = 0.7\ rad/s$, vilket är maximala skärfrekvensen med $PM = 30^o$ och P(I)-regulator.

   (b) Fasen skall lyftas 50^o vid $\omega = 1$ vilket uppnås med en lead-länk

$$F_L(s) = K \frac{2.89s + 1}{0.12 \cdot 2.89s + 1}$$

   Systemet innehåller redan en integration varför ingen lag-länk behövs för att ta bort det stationära reglerfelet vid steg i börvärdet. Förstärkningen K väljs så att $|FG(i1)| = 1$, dvs. $K = 1/(2.89 \cdot 2) = 0.173$.

   (c) En tidsfördröjning $e^{-\theta s}$ ger ett negativt fasbidrag $-\theta\omega_c\ rad$ vid $\omega_c = 1$. Detta får maximalt vara lika med fasmarginalen, dvs. -50^o, om stabiliteten inte skall förloras. Maximalt tillåtna fördröjning blir $\theta = 50 \cdot \pi/180 = 0.87\ s$.

4. (a) Laplace ger

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s + 0.2)^2}$$

   Slutna systemet $G_c = GF/(1 + GF)$, ger

$$F = \frac{1}{G} G_c 1 - G_c = \frac{(s + 0.2)^2}{s(s + 2)}$$

   (b) Observatörens poler ges av egenvärden till $A - KC$. Placering av dessa i $s = -2$ ger

$$K = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 2.52 \end{pmatrix}$$

(visas ej här). Tillståndsåterkopplingens poler ges egenvärden till $A-BL$, och placering av dessa i $s=-1$ ger

$$L = \begin{pmatrix} 9.6 & 1.6 \end{pmatrix}$$

(visas ej här). Regulatorn blir då

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}) \\ u(t) = -L\hat{x}(t) + l_0 r(t) \end{aligned}$$

För slutna systemet gäller vid stationäritet $y = C(A-BL)^{-1}Bl_0 r = l_0 r$ och $l_0 = 1$ ger statisk förstärkning 1

5. (a) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(i\omega) = \frac{1}{1 + G_o(i\omega)}$$

där G_o är öppna systemet. Vid ω_{180} är G_o reell och ges av $G_o(i\omega_{180}) = -|G(i\omega_{180})|$, dvs

$$|S(i\omega_{180})| = \frac{1}{1 - |G_o(i\omega_{180})|}$$

vilket är större än 1 om $|G_o(i\omega_{180}| < 1$. Det senare är ett krav för ett stabilt slutet system när det öppna systemet är stabilt. Dvs. $|S| > 1$ vid ω_{180}. För ett system med en störning d enligt

$$y = G(s)u + G_d(s)d$$

så gäller $e = SG_d d$, dvs. återkopplingen förstärker effekten av störningen då $|S| > 1$. Dvs. vi får alltid en ökad störningskänslighet vid ω_{180} (för öppet stabila system).

(b) Om $|S| < 2$ för alla frekvenser kräver vi även detta vid ω_{180} där

$$|S| = \frac{1}{1 - \frac{1}{A_m}}$$

dvs. vi kräver $A_m > 2$.