REGLERTEKNIK
KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2010–06–09, kl. 14.00–19.00

1. (a) Polerna s ges av $s^2 + 2s + 4 = 0$, d.v.s. $s = -1 \pm j\sqrt{3}$. Nollstället ligger i $s = 0$.

   (b) Tillståndsmatiserna ges av
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 4y(t) = 4\dot{u}(t)$.

   (d) Laplacetransformen för en ramp är $U(s) = 1/s^2$, så $Y(s) = \frac{4s}{s^2+2s+4}\frac{1}{s^2} = \frac{4}{s^2+2s+4}\frac{1}{s}$, vilket motsvarar stegsvaret för ett andra ordningens system med relativ dämpning $\zeta = 0.5$ och $\omega_0 = 2$. Sådana finns återgiva i t.ex. figur 2.7 i kursboken.

   (e) Slutna systemets differentialekvation ges as $\ddot{y}(t) + (2 + 4K)\dot{y}(t) + 4y(t) = 0$. För att systemet ska vara stabilt ska alla koefficienter vara positiva, d.v.s. $K > -1/2$.

2. (a) En P-regulator påverkar bara amplitudkurvan så högsta skärfrekvensen ligger där faskurvan är $-120°$, vilket ger $\omega_c = 1.9$ rad/s.

   (b) Den önskade skärfrekvensen är $\omega_{c,d} = 2\omega_c = 3.8$ rad/s. Vid denna frekvens är fasen $-176°$, så den behöver lyftas med $56°$. Vi använder två fasavancerande länkar
$$F_{\text{lead}}(s) = \frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}.$$
För att kompensera för fasförlusten på $5.7°$ från den fasretarderande länken så ska varje fasavancerande länk lyfta fasen $\geq 31°$, vilket ger $\beta = 0.3$. Vi använder $\tau_D = (\omega_{c,d}\sqrt{\beta})^{-1} = 0.48$.
Den fasretarderande länken
$$F_{\text{lag}}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma},$$
används för att ta bort det statiska felet. Det slutna systemet är stabilt och vi använder slutvärdesteoremet
$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1 + F_{\text{lead}}^2(s)F_{\text{lag}}(s)KG(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + 1^2 \cdot 1/\gamma \cdot K \cdot 2}.$$
Med $\gamma = 0$ fås statiskt fel 0. Enligt tumregel väljs $\tau_I = 10/\omega_{c,d}$.

Till sist väljs förstärkning K så att önskad skärfrekvens fås

$$|F(j\omega_{c,d})G(j\omega_{c,d})| = \underbrace{|F^2_{\text{lead}}(j\omega_{c,d})|}_{1/\beta} \underbrace{|F_{\text{lag}}(j\omega_{c,d})|}_{\approx 1} K \underbrace{|G(j\omega_{c,d})|}_{\approx 0.28} = 1$$

$$\Rightarrow K = \beta/0.28 \approx 1.1$$

En möjlig regulator är då

$$F(s) = KF^2_{\text{lead}}(s)F_{\text{lag}}(s) = \frac{1.1(0.48s+1)^2(2.6s+1)}{(0.14s+1)^2 2.6s}.$$

3. (a) $\phi = 0$ är en stationär punkt för (1) då $u = 0$.

[1]

För små ϕ gäller att $\cos\phi \approx 1$ och $\sin\phi \approx \phi$. Linjäriseringen av (1) blir

$$\ddot{z} + \ddot{\phi} l = g\phi$$

[1]

Med $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$ och $u = \ddot{z}$ fås

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= \frac{g}{l}x_1 - \frac{1}{l}u \end{aligned}$$

och tillståndsmodellen blir

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/l \end{pmatrix} u$$

[1]

(b) Polerna till systemet ges av

$$\begin{aligned} det(sI - A) &= 0 \\ s^2 - 10 &= 0 \\ s &= \{\sqrt{10}, -\sqrt{10}\} \end{aligned}$$

[1]

Vi ska flytta polen i $\sqrt{10}$ till $-\sqrt{10}$. Den karakteristiska ekvationen ska alltså bli $s^2 + 2\sqrt{10}s + 10 = 0$. [1]

En PD-regulator ges av

$$u = K_p\phi + K_d\dot{\phi}$$

[1]

och vi kan skriva det återkopplade systemet på formen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_p & K_d \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 - K_p & -K_d \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

Den karakteristiska ekvationen blir

$$s^2 + K_d s + K_p - 10 = 0$$

[1]

Vi jämför koefficienterna och får $K_d = 2\sqrt{10}$ och $K_p = 20$. [1]

(c) Driften kan betraktas som mätbrus n. Processen och regulatorn har överföringsfunktionerna $G(s) = \frac{-1}{s^2-10}$ och $F_y(s) = -20 - 2\sqrt{10}s$. Överföringsfunktionen från n till y ges av

$$Y(s) = -T(s)N(s), \quad T(s) = \frac{G(s)F_y(s)}{1 + G(s)F_y(s)},$$

och $N(s) = d/s^2$. Eftersom $T(s)N(s)$ har en dubbelpol i $s = 0$ går $y(t) \to \infty$ och pendeln faller. [1]

Ett sätt att stabilisera pendeln är att designa en stabiliserande regulator $F_y(s)$ med ett dubbelt nollställe i $s = 0$ som därmed kancellerar driften. [1]

4. (a) Från $X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s) \Leftrightarrow \dot{x}_1 = -2x_1 + u$ och blockdiagramet fås

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} u \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}} x\end{aligned}$$

(b)

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det \mathcal{C} = -6$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathcal{O} = -1$$

Både $\mathcal{C}$ och $\mathcal{O}$ har full rang. $\Leftrightarrow$ Tillståndsmodellen är minimal.

(c) En observerare för systemet är

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}\left(y - \mathbf{C}x\right)$$

och skattningsfelet $\tilde{x} = x - \hat{x}$ uppfyller

$$\dot{\tilde{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{KC}\right)\tilde{x}.$$

Låt $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \end{bmatrix}$, då blir styrlagen (3)

$$u(t) = -K\hat{x}_1(t) + mr(t) = -\mathbf{L}\hat{x}(t) + mr(t).$$

Introducera tillståndsvektorn $\xi = \begin{bmatrix} x^T & \tilde{x}^T \end{bmatrix}^T$ vilket ger systemet

$$\dot{\xi} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BL} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{KC} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_\xi} \xi + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_\xi} r$$

$$x_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_\xi} \xi$$

Överföringsfunktionen blir

$$G(s) = \mathbf{C}_\xi \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_\xi\right)^{-1} \mathbf{B}_\xi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tips}}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}\right)^{-1} \mathbf{B}m$$

$$\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BL}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2+K & 0 & 0 \\ -1+K & s & 0 \\ 0 & -1 & 1+s \end{bmatrix}^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tips}}}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2+K} & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 \\ \star & \star & \star \end{bmatrix},$$

där $\star$ nollskilda element. Detta ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{m}{s+2+K}.$$

Om den önskade styrlagen (2) sätts in i $X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s)$ fås

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2}U(s) = \frac{1}{s+2}\left(-KX_1(s) + mR(s)\right) = \frac{m}{s+2+K}R(s).$$

5. (a) i. Framkopplingslänken ges av

$$G_u(s) = \frac{2}{s+1} \quad G_v(s) = \frac{5}{s+3}$$
$$F_f(s) = -\frac{G_v(s)}{G_u(s)} = -\frac{5(s+1)}{2(s+3)}$$

[1]

ii. Låt $\tilde{G}_u(s) = \frac{2(1-\Delta)}{s+1}$. Utsignalen ges av

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G_v(s)V(s) + \tilde{G}_u(s)U(s) \\
&= (G_v(s) + \tilde{G}_u(s)F_f(s))V(s) - K\tilde{G}_u(s)Y(s) \\
Y(s) &= \frac{G_v(s) + \tilde{G}_u(s)F_f(s)}{1 + K\tilde{G}_u(s)}V(s).
\end{aligned}
$$

[1]

Vidare får vi

$$
Y(s) = \frac{5(s+1)\Delta}{(s+3)(s+1+2K(1-\Delta))}V(s).
$$

[1]

Eftersom systemet är stabilt för $K > 0$ och $|\Delta| < 1$, så kan vi använda slutvärdesteoremet [1]

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\frac{5(s+1)\Delta}{(s+3)(s+1+2K(1-\Delta))}\frac{1}{s} \\
&= \frac{5\Delta}{3(1+2K(1-\Delta))}
\end{aligned}
$$

[1]

(b) i. Poler öppet system: $\{-3, -3, 1, 5\}$ [1]
Poler då $K \to \infty$: $\{-\infty, -5, -5, -2\}$ [1]

ii. Stegsvar A: $K = 4$ (Komplexa poler i högra halvplanet) [1]
Stegsvar B: $K = 8$ (Komplexa poler i vänstra halvplanet) [1]

iii. Nyquistdiagram A, eftersom B aldrig omsluter -1 för något K. [1]