Lösningar till Tentamen i Reglerteknik AK EL1000/EL1100/EL1120
2010-10-19

1a. Ansätt: $G(s) = \frac{b}{s+a}$ $a > 0$ och $b > 0$. Utsignalen ges av

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)), \quad \omega = 2$$

$$|G(i\omega)| = \frac{b}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = 2$$

$$\arg G(i\omega) = \arg b - \arg(i\omega + a) = -\arctan\frac{\omega}{a} = -\frac{\pi}{4}.$$

Svar: För $\omega = 2$ fås $a = 2$ och $b = 4\sqrt{2}$. $y_0 = 2\sin(0 - \pi/4) = -\sqrt{2}$.

1b.

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad G_o(s) = \frac{1}{s} = F(s)G(s) = F(s)\frac{10}{s+1}$$

Svar: PI regulatorn är $F(s) = 0.1\left(1 + \frac{1}{s}\right)$

1c.

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_0}{y_0 t + 1}\right) = -\frac{y_0^2}{(y_0 t + 1)^2} = -y^2(t), \quad y(0) = y_0$$

Det är också möjligt att lösa diff-ekvationen genom integration

$$\int_0^t \frac{-\dot{y}(\tau)}{y^2(\tau)} d\tau = \int_0^t 1 d\tau \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{y(\tau)}\right]_0^t = t \;\Rightarrow\quad y(t) = \frac{1}{t + 1/y_0} = \frac{y_0}{y_0 t + 1}$$

1d. Stationär punkt: $y^* = 0 \Rightarrow$ linjär approximation $\dot{y}(t) = 0$ med lösning

$$y(t) = y_0$$

Observera att den linjära lösningen är en bra approximation till lösningen till den olinjära diff-ekvationen för små värden på $y_0 t$, dvs på små initalvärden och/eller kort tid.

2a.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\end{aligned}$$

2b. Systemet med tillståndsåterkoppling är

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ u(t) &= -Lx(t) + r(t)\end{aligned}$$

med $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$.
Det återkopplade systemets poler ges av

$$\det(\lambda I - (A - BL)) = \lambda^2 + (2 + l_1)\lambda + l_1 + l_2 + 1 = 0.$$

Vill att polerna ska hamna i -2, det vill säga att

$$(\lambda + 2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Genom att jämföra koefficienter fås $l_1 = 2$ och $l_2 = 1$. Svar: $u(t) = -2x_1(t) - x_2(t) + r(t)$

2c. Fall 1) Mät $x_1(t)$: $C = [1\ 0] \Rightarrow CA = [-1\ 0]$ och observerarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \ \det\mathcal{O} = 0$$

är singulär, dvs systemet är inte observerbart.
Fall 2) Mät $x_2(t)$: $C = [0\ 1] \Rightarrow CA = [1\ -1]$ och observerbarhetsmatrisen

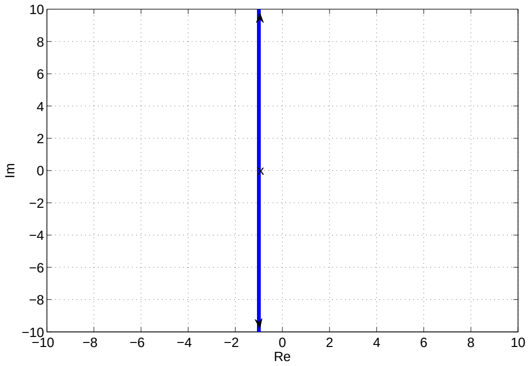
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \ \det\mathcal{O} = -1 \neq 0$$

har full rang, dvs systemet är observerbart. Svar: Mät $x_2(t)$.

2d. Detta är en standard rotort med

$$G_o(s) = \frac{K}{(s+1)^2}, \quad K = l_2 \geq 0$$

Karakteristisk ekvation är $s^2 + 2s + 1 + K$ med poler $s = -1 \pm i\sqrt{K}$ dvs stabilt för alla $K > 0$.
Startpunkter: $-1, -1$
Ändpunkter: saknas
Asymptoter: $\pm\pi/2$ med skärningspunkt -1
Reella axeln: enbart startpunkter
Skärning imaginära axeln: Saknas eftersom det återkopplade systemet alltid är stabilt.



3a Nej. Systemet har en pol i origo och är således på stabilitetsgränsen. Det skulle sannolikt vara mycket påfrestande för en operatör att hela tiden sitta och försöka styra propellern för att balansera farkosten i vattnet.

3b Börja med att införa en lead-länk

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

För systemet med P-regulatorn är fasmarginalen cirka 33^o vilket innebär att $\phi_m = 43^o$. Vid den önskade skärfrekvensen $\omega_{c,d} = 3rad/s$ är fasen cirka -180^o varför lead-länken måste ge en fasökning på 43^o, svarande mot ungefär $\beta = 0.18$. τ_D bestäms med sambandet

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 0.79$$

För att få den önskade skärfrekvensen bestäms K enligt

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,d})|} = \frac{0.18}{0.37} \approx 1.15.$$

Kravet på att stationära fel skall regleras ut är redan uppfyllt. Det kan ses genom att använda slutvärdessatsen

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)F(s)}\frac{1}{s} = 0$$

varför det inte behövs någon lag-länk. Svar: En regulator som uppfyller specifikationerna är:

$$F(s) = 1.15\frac{0.79s + 1}{0.18 \times 0.79s + 1} = \frac{0.91s + 1.15}{0.14s + 1}.$$

3c Nej, den extra polen i -1000 ger inte upphov till någon betydande fasförlust eller förstärkningsförändring för frekvenser i eller under det reglerade systemets skärfrekvens.

4a. Det slutna systemet ges av $G_c(s)$. $Y(s) = S(s)V(s)$ där $S(s) = 1 - G_c(s)$ är känslighetsfunktionen. Från stegsvaret $((y(t) \to 1 \; t \to \infty)$ vet vi att $G_c(0) = 1 \Leftrightarrow S(0) = 0$. Effekten av en konstant störning v blir alltså noll vid stationäritet.

4b. Signalen $w(t)$ kommer in i systemet på samma sätt som $r(t)$ (sånär som på tecken), $Y(s) = -G_c(s)W(s)$. Från stegsvaret vet vi att $G_c(0) = 1$. Effekten av en konstant störning w blir alltså $y = -w$ vid stationäritet. För att ta bort störningen krävs $G_c(0) = 0$, dvs att regulatorn har ett nollställe i $s = 0$ (ren derivering)

4c. För att uppfylla $y(t) \to 0$ krävs för fallet $v(t) = v$ att $S(0) = 0$ och för fallet $w(t) = w$ att $G_c(0) = Q(0) = 0$ men $S + Q \equiv 1$. Alltså kan inte en regulator uppfylla kravet för båda fallen.

5a. $X(t_1) = e^{At_1}X(0) = e^{At_1}$

5b. $X(t_2 + t_1) = e^{At_2}X(t_1) = e^{At_2}e^{At_1}$

5c. $X(t_2 + t_1) = e^{A(t_2+t_1)}X(0) = e^{A(t_2+t_1)}$. Eftersom diff-ekvationen har en entydig lösning så är lösningarna lika, dvs $e^{At_2}e^{At_1} = e^{A(t_2+t_1)}$

5d. Välj $t_2 = -t$ och $t_1 = t \Rightarrow e^{-At}e^{At} = e^{A0} = I$ vilket skulle visas.

5d.

$$\frac{d}{dt}\det(X(t)) = \text{trace}\left(\left[\frac{d}{dt}X(t)\right][X(t)]^{-1}\right)\det(X(t))$$

och $\dot{X}(t) = AX(t), \; X(0) = I$, (obs $X(t) = e^{At}$ är inverterbar enligt Uppgift 5d). Detta ger

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(X(t)) &= \text{trace}\left([AX(t)]\,[X(t)]^{-1}\right)\det(X(t)) \;\Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\det(X(t)) &= \text{trace}\,(A)\,\det(X(t))
\end{aligned}$$

Detta är en linjär skalär diff-ekvation med lösning $\det(X(t)) = e^{\text{trace}(A)t}$ Eftersom $X(t) = e^{At}$ så har vi visat att $\det(e^{At}) = e^{\text{trace}(A)t}$. Den skalära exponentialfunktionen är positiv vilket ger att determinanten alltid är positiv.