REGLERTEKNIK, KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000, EL1110 och EL1120

Tentamen 2010–10–19, kl 8:00–13:00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK (Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande), räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att övningsmaterial (övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig: Bo Wahlberg 790 7242 alt. 070 565 5846

Resultat: Finns på Studerande-expeditionen (STEX) senast 2010-11-08.

Utlämning: Tentamen kan hämtas ut vid Studerande-expeditionen (STEX), plan 3, Osquldas väg 10.

Lycka till!

1. (a) Då man applicerar insignalen

$$u(t) = \sin(2t), \quad t \geq 0$$

på ett första ordningens system

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t), \quad y(0) = y_0$$

får man utsignalen

$$y(t) = 2\sin(2t - \pi/4).$$

Bestäm systemparametrarna a och b samt initialvärdet y_0. (3p)

(b) Konstruera en PI-regulator för systemet

$$G(s) = \frac{10}{s+1}$$

så att det återkopplade systemets överföringsfunktion blir

$$G_c(s) = \frac{1}{s+1}.$$

(3p)

(c) Visa att den olinjära differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = -y^2(t), \quad y(0) = y_0$$

har lösning

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 t + 1}.$$

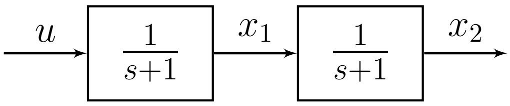
(2p)

(d) Linjärisera den olinjära differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = -y^2(t), \quad y(0) = y_0$$

runt stationär punkt. Lös motsvarande linjära differentialekvation. Jämför med lösningen i Uppgift c). (2p)

2. Ett system av två seriekopplade tankar kan förenklat beskrivas av blockschemat i figuren nedan, där tillståndsvariablerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ betecknar nivån i respektive tank och $u(t)$ betecknar inflödet i den första tanken.



   (a) Ställ upp en tillståndsmodell för systemet med de tillstånd som angivits i Figuren. (2p)

   (b) Bestäm, med hjälp av tillståndsmodellen i Uppgift a), en tillstånds återkoppling på formen
   $$u(t) = -l_1 x_1(t) - l_2 x_2(t) + r(t)$$
   sådan att det återkopplade systemets poler placeras i -2. (2p)

   (c) Antag att man endast kan mäta ett av tillstånden men att man kan få välja vilket som skall mätas. Vilket av tillstånden är att föredra om man vill skapa ett reglersystem med hjälp av denna mätsignal? Motivera! (2p)

   (d) Rita en rotort för det återkopplade systemets poler som funktion av l_2 när styrlagen
   $$u(t) = -l_2 x_2(t) + r(t), \qquad 0 \leq l_2 \leq \infty$$
   används. (4p)

3. Uppgiften går ut på att styra propellern på en undervattensrobot för att reglera dess höjd över botten. Överföringsfunktionen från motorpådrag till höjd ges av

$$G(s) = \frac{1.8(s+3)}{s(s^2+1.6s+4)}$$

Bodediagram för $G(s)$ ges på nästa sida. Följande återkopplade reglering används

$$U(s) = F(s)[R(s) - Y(s)]$$

och den nuvarande regulatorn är en P-regulator med förstärkning 1, dvs

$$F(s) = 1$$

Det slutna systemets beteende med denna regulator är för långsamt och för svängigt.

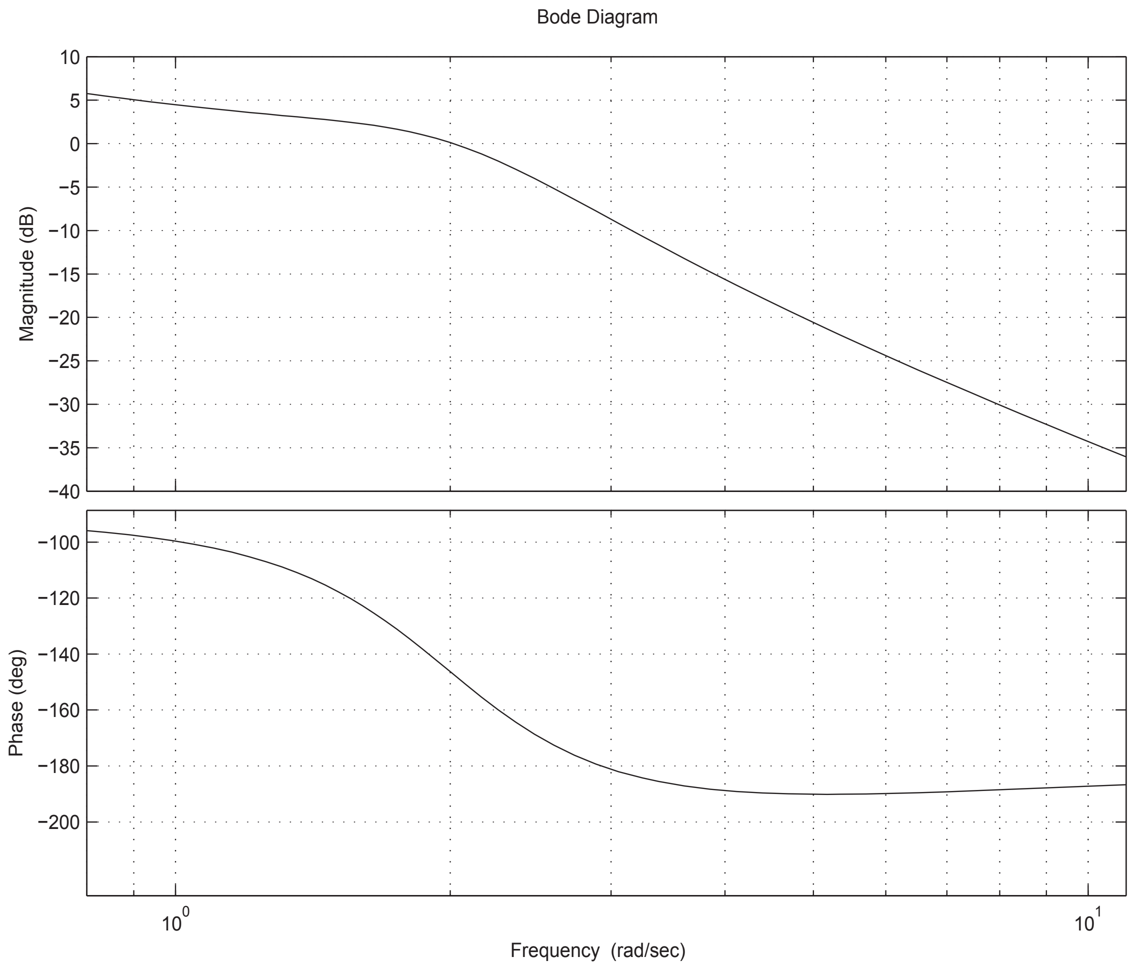
(a) Är det lämpligt att köra detta system utan en återkoppling, dvs med öppen styrning? (1p)

(b) Konstruera en regulator så att vi får en skärfrekvens på $3rad/s$ samt ökar fasmarginalen med 10^o jämfört med det ursprungliga P-reglerade systemet. Det får inte finnas något stationärt fel vid konstant referenssignal. (7p)

(c) Man misstänker att det verkliga systemet egentligen ges utav

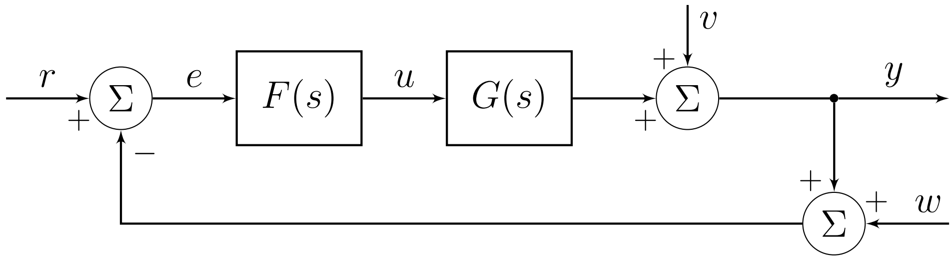
$$G^o(s) = G(s)\frac{1000}{s+1000}.$$

Kan detta ge upphov till några problem för din regulatordesign i Uppgift b)? (2p)



Figur 1: Bodediagram för $G(s)$ i Uppgift 3.

4. Blockdiagrammet nedan visar ett återkopplat system där regulatorn $F(s)$ är vald så att det slutna systemet blir stabilt.



Om störningarna $v(t) = w(t) = 0$, (identiskt noll) och referenssignalen väljs till

$$r(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0, \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

blir utsignalen $y(t) = 1 - e^{-t}\cos t$.

(a) Antag $r(t) = w(t) = 0$ (identiskt noll). Hur stor blir inverkan på utsignalen $y(t)$ av en konstant störning $v(t) = v$ vid stationäritet? (3p)

(b) Antag $r(t) = v(t) = 0$ (identiskt noll). Hur stor blir inverkan på utsignalen $y(t)$ av en konstant störning $w(t) = w$ vid stationäritet? Vad krävs av regulatorn $F(s)$ för att en konstant störning $w(t) = w$ inte skall påverka utsignalen $y(t)$ stationärt? (4p)

(c) Kan man konstruera **en** regulator $F(s)$ som uppfyller kravet att $y(t)$ inte får påverkas av samtidiga störningar $v(t) = v \neq 0$ och $w(t) = w \neq 0$ stationärt? (3p)

5. Studera matris-differentialekvationen

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(0) = I,$$

där $X(t)$ och A är $n \times n$ matriser. Med I menar vi motsvarande enhetsmatris. Målet med uppgiften är att härleda ett antal fundamentala egenskaper hos matrisexponentialfunktionen e^{At}.

(a) Lös differentialekvationen från tiden 0 till tiden t_1. (1p)

(b) Lös differentialekvationen från tiden t_1 till tiden $(t_2 + t_1)$ med initialvärde $X(t_1)$ från Uppgift a). (1p)

(c) Lös istället differentialekvationen från tiden 0 direkt till tiden $t = (t_2 + t_1)$, och använd lösningen av Uppgift b) för att motivera varför

$$e^{At_2} e^{At_1} = e^{A(t_2+t_1)}$$

(2p)

(d) Motivera med hjälp av Uppgift c) varför inversen av matrisen e^{At} ges av

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$$

(1p)

(e) Med $\det(X)$ menar vi determinanten av matrisen X. Med $\mathrm{trace}(X)$ menar vi spåret av matrisen X, dvs summan av diagonalelementen av X. Om matrisfunktionen $X(t)$, som funktion av t, är inverterbar så ger Jacobis formel att $\det(X(t))$ satisfierar följande differentialekvation

$$\frac{d}{dt}\det(X(t)) = \mathrm{trace}\left(\left[\frac{d}{dt}X(t)\right][X(t)]^{-1}\right)\det(X(t))$$

Visa att denna differentialekvation tillsammans med

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(0) = I,$$

ger att

$$\det(e^{At}) = e^{\mathrm{trace}(A)t}$$

Visa också att detta samband innebär att $\det(e^{At})$ alltid är positiv.

(5p)