REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2010–10–14, kl. 14.00–19.00

1. (a) Stegsvaret ges av $y(t) = K(1 - e^{-t/T})$. Från slutvärdet fås $K = 2$, och tiskonstanten kan avläsas till $T = 0.5$.

   (b) I stationäritet ges utsignalen av

   $$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G(i\omega)),$$

   där $|G(i\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$ och $\arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$.

   (c) Systemet ges av $\dot{x} = f(x,u) = x - x^2 + u$ och $y = h(x) = x$. De stationära punkterna ges av

   $$0 = f(x_0, u_0) = x_0 - x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

   eftersom $u_0 = 1$. Derivatorna blir

   $$f_x(x,u) = 1 - 2x, \quad f_u(x,u) = 1, \quad h_x(x) = 1, \quad h_u(x) = 0,$$

   och vi får då $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

   $$A = f_x(x_0,u_0) = -\sqrt{5}, \quad B = f_u(x_0,u_0) = 1, \quad C = h_x(x_0) = 1, \quad D = h_u(x_0) = 0,$$

   och då $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

   $$A = f_x(x_0,u_0) = \sqrt{5}, \quad B = f_u(x_0,u_0) = 1, \quad C = h_x(x_0) = 1, \quad D = h_u(x_0) = 0.$$

   Det linjäriserad systemet ges av

   $$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u, \end{aligned}$$

   där $\Delta x = x - x_0$, $\Delta u = u - 1$, $\Delta y = y - x_0$ och x_0, A, B, C, D anges ovan. Kring den stationära punkten $x_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ är systemet asymptotiskt stabilt, och kring den stationära punkten $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ är systemet instabilt.

2. (a) Överföringsfunktionerna finnes genom:

i. $X(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)X(s)) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)X(s)$
$\Rightarrow X(s)(1 + G_1(s)G_2(s)) = G_1(s)U(s)$
$\Rightarrow X(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}U(s)$
$\Rightarrow G_X(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$

ii. $Y(s) = G_4(s)U(s) + G_3(s)X(s) = G_4(s)U(s) + G_3(s)G_X(s)U(s)$
$= (G_4(s) + \frac{G_1(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)})U(s)$
$\Rightarrow G(s) = G_4(s) + \frac{G_1(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$

(b) Vi kan skriva $G(s) = \frac{s+2}{s^2}$ som

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2} = \frac{s+2}{s^2 + 0s + 0} = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

Detta kan nu skrivas enkelt på t.ex. styrbar kanonisk form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_s} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_s} u \\ y &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}}_{C_s} x \end{aligned} \tag{1}$$

eller alternativt (det räcker att svara med en korrekt form för att få full poäng) på observerbar kanonisk form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_o} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B_o} u \\ y &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C_o} x \end{aligned} \tag{2}$$

Ett system är en minimal realisation om det är både styrbart och observerbart. Därför måste styrbarhetsmatrisen ($\mathcal{S}$) och observherbarhetsmatrisen ($\mathcal{O}$) ha full rang.

$$\det \mathcal{S} = \det\left(\begin{bmatrix} B_s & A_s B_s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0$$
$$\det \mathcal{O} = \det\left(\begin{bmatrix} C_s \\ C_s A_s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = -4 \neq 0$$

Alternativt om en observerbar kanonisk represtation används:

$$\det \mathcal{S} = \det\left(\begin{bmatrix} B_o & A_oB_o \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = -4 \neq 0$$

$$\det \mathcal{O} = \det\left(\begin{bmatrix} C_o \\ C_oA_o \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \neq 0$$

I båda fallen har styrbarhetsmatrisen ($\mathcal{S}$) och observerbarhetsmatrisen ($\mathcal{O}$) full rang, eftersom determinanten är skilld från noll. Därför är systemet en minimal realisation.

(c) Med tillståndsåterkopplingen $u(t) = -Lx(t) + l_0r(t)$, blir tillståndsekvationen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A - BL)x(t) + l_0r(t)$$

Polerna ges då av egenvärden till $(A - BL)$, d.v.s. genom karakteristiska ekvationen:

$$\begin{aligned} \det(sI - (A_s - B_sL)) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s + l_1 & l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix}\right) = s^2 + l_1s + l_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Önskade poler i $\{-1, -1\}$ ger följande karakteristiska ekvation:

$$(s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1 \tag{4}$$

Genom att identifiera koefficienter mellan (3) och (4) erhålles:

$$l_1 = 2 \qquad l_2 = 1$$

<u>Notera:</u> Detta kunde även inses snabbt genom att uppmärksamma att för system skrivna på styrbar kanonisk form är koefficenterna i den önskade karakteristiska ekvationen samma som parametrarna l_i i L-matrisen för återkopplingen.

Systemet från $r(t)$ till $y(t)$ är $Y(s) = C(sI - (A - BL))^{-1}Bl_0R(s)$. Den statiska förstärkningen erhålls då $s = 0$, vilket medför:

$$l_0 = \frac{1}{C_s(-A_s + B_sL)^{-1}B_s} = \frac{1}{2}$$

På liknande sätt kan L och l_0 erhållas om kanonisk observerbar form nyttjats, d.v.s. (A_o, B_o, C_o) i (2). Då blir

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad l_0 = \frac{1}{2}.$$

(d) En observatör införs i systemet enligt:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Polerna ges nu av egenvärden till $(A - KC)$, d.v.s. genom karakteristiska ekvationen genom matriserna i (1):

$$\begin{aligned}
\det(sI - (A_s - KC_s)) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} s + k_1 & 2k_2 \\ k_2 - 1 & s + 2k_2 \end{bmatrix}\right) = s^2 + (k_1 + 2k_2)s + 2k_1 = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Önskade poler i $\{-10, -10\}$ till observatören ger en följande karakteristiska ekvation:

$$(s + 1)^2 = s^2 + 20s + 100 \tag{6}$$

Genom att identifiera koefficienter mellan (5) och (6) erhålles:

$$k_1 = 50, \qquad k_2 = -15, \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 50 & -15 \end{bmatrix}^T$$

På liknande sätt kan K erhållas om kanonisk observerbar form nyttjats. För system skrivna på observerbar kanonisk form är koefficenterna i den önskade karakteristiska ekvationen samma som parametrarna k_i i K-matrisen för observatören, d.v.s.:

$$K = \begin{bmatrix} 20 & 100 \end{bmatrix}^T.$$

3. (a) Låt ω_c vara skärfrekvensen för $F(s)G(s)$ då $F(s) = K_P$. Eftersom fasmarginalen ska vara $\varphi_m = 45°$ och $\varphi_m = \arg(F(i\omega_c)G(i\omega_c)) + 180° = \arg(G(i\omega_c)) + 180°$ med en P-regulator, får vi $\arg(G(i\omega_c)) = -135°$. I figur 3 ser vi att $\omega_c = 2.0$ rad/s.

(b) Vi har $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$. Vi börjar med den fasavancerande länken

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}.$$

Eftersom det nya systemet ska vara två gånger snabbare än i uppgift 3a, ska skärfrekvensen vara $\omega_c = 4$ rad/s.

Då fasmarginalen ska vara $\varphi_m = 45°$ and $\varphi_m = \arg(F(i\omega_c)G(i\omega_c)) + 180° = \arg(F_{lead}(i\omega_c)) + \arg(F_{lag}(i\omega_c)) + \arg(G(i\omega_c)) + 180°$, får vi $\arg(F_{lead}(i\omega_c)) = -135° - \arg(F_{lag}(i\omega_c)) - \arg(G(i\omega_c))$. Från Bodediagrammet får vi $\arg(G(i\omega_c)) \approx$

$-165°$ och enligt tumregeln för fasretarderande länkar vet vi att $\arg(F_{lag}(i\omega_c) \approx -6°$. Alltså $\arg(F_{lead}(i\omega_c)) = -135° + 6° + 165° = 36°$ och $\beta = 0.26$. Med detta β, får vi $\tau_D = (\omega_c\sqrt{\beta})^{-1} = 0.49$.

Nästa steg är att välja K så att $|F_{lead}(i\omega_c)||F_{lag}(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = 1$. Enligt tumregeln gäller $|F_{lag}(i\omega_c)| \approx 1$ och vi får alltså

$$\frac{K}{\sqrt{\beta}}\frac{|k|}{|i\omega_c(i\omega_c + a)(i\omega_c + b)|} = 1,$$

vilket ger $K = 11$.

För den fasretarderande länken

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma},$$

använder vi tumregeln och sätter $\tau_I = 10/\omega_c = 2.5$.

Vi väljer γ så att statiska felet vid en rampsignal är noll. Slutvärdesteoremet (slutna systemet är stabilt!) ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + F_{lead}(s)F_{lag}(s)G(s)}\frac{1}{s^2},$$

vilket ger

$$\lim_{s\to 0} \frac{s(s+a)(s+b)(\beta\tau_D s + 1)(\tau_I s + \gamma)}{s(s+a)(s+b)(\beta\tau_D s + 1)(\tau_I s + \gamma) + Kk_1(\tau_D s + 1)(\tau_I s + 1)}\frac{1}{s} = \frac{ab\gamma}{Kk_1}.$$

Alltså ska vi välja $\gamma = 0$.

Den resulterande regulatorn blir

$$F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s) = 11\frac{0.49s + 1}{0.13s + 1}\frac{2.5s + 1}{2.5s}.$$

(c) Först tar vi fram det relativa modellfelet $G_\Delta(s)$, $G^o(s) = G(s)(1 + G_\Delta(s))$:

$$G^o(s) = G(s)(1 - 1 + \frac{(1 + 0.1\theta)s + 20}{s + 20}) \Rightarrow G_\Delta(s) = -1 + \frac{(1 + 0.1\theta)s + 20}{s + 20} = \frac{0.1\theta s}{s + 20}.$$

Enligt robusthetskriteriet är slutna systemet stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{|G_\Delta(i\omega)|},\ \forall\omega \geq 0,$$

där $T(s)$ är den komplementära känslighetsfunktionen med $G^o(s) = G(s)$. I detta fallet är $T(s) = G_c(s)$ så figur 4 visar $|T(i\omega)|$.

Notera att $\dfrac{1}{G_\Delta(i\omega)} = \dfrac{i\omega + 20}{0.1\theta i\omega}$ har en pol i origo och ett nollställe i $\omega = -20$ rad/s. Alltså har amplitudkurvans lågfrekvensasymptot lutning -1 fram till brytpunkten $\omega = 20$ rad/s. Från figur 4 ser vi att robusthetskriteriet är uppfyllt om $\dfrac{1}{|G_\Delta(i\omega)|}$ ligger ovanför resonanstoppen till $G_c(i\omega)$, d.v.s., $\dfrac{1}{|G_\Delta(i\omega_r)|} > |G_c(i\omega_r)| \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{4.7^2+20^2}}{0.47\theta} > 1.33 \Leftrightarrow \theta < 32.9$. Alltså kommer systemet vara stabilt i minst 32 år.

4. (a)
   - Stegsvar 3 och 4 går mot 1 och har alltså inget statiskt fel. Alltså måste systemet innehålla en integrator ($1/s$). I Nyquistkurvan motsvaras detta av att kurvan går mot oändligheten när ω går mot 0. Stegsvar 3 och 4 hör alltsåihop med kurva B och E. Svängigheten avgörs av fasmarginal och amplitudmarginal. Kurva B har lägre fasmarginal och amplitudmarginal än E.
     $B \leftrightarrow 4$, $E \leftrightarrow 3$.
   - Stegsvar 1 och 2 går båda mot 0.4. Slutvärdet ges av (slutvärdessatsen) $\lim_{s\to 0} \frac{G(s)}{1+G(s)}$. Alltså måste Nyquistkurvorna börja i samma punkt. Kurva A och D börjar i samma punkt ($G(0) \approx 0.67$) medan kurva C börjar i en annan punkt (G(0) = 1). Stegsvar 1 och 2 hör ihop med kurva A och D. Kurva A har lägre amplitudmarginal än D (närmare punkten -1) och ska alltså ge ett svängigare stegsvar. $A \leftrightarrow 1$, $D \leftrightarrow 2$.

   (b)
   - P-regulator skalar om amplituden på Nyquistkurvan men ändrar inte fasen. Det återkopplade systemet självsvänger när det öppna systemet har fasmarginal noll. Detta sker när Nyquistkurvan skär punkten -1. Nyquistkurvan skär negativa reella axeln vid $\omega = 0.92$. Från figuren fås $G(i0.92) \approx -0.7$. Självsvängning när $-0.7K_p = -1 \implies K_p = 1/0.7 \approx 1.4$.
   - Frekvensen på självsvängningen kommer att vara frekvensen där det öppna systemet skär punkten -1. Alltså kommer den att ha frekvens $\omega = 0.92$. Periodtiden blir då $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 6.8s$.

   (c) D-regulatorn påverkar både amplitud och fas för Nyquistkurvan.

$$|F(i\omega)G(i\omega)| = |K_D i\omega||G(i\omega)| = |K_D\omega||G(i\omega)|$$

   Amplituden skalas om med $K_D\omega$.

$$\arg(F(i\omega)G(i\omega)) = \arg(K_D i\omega) + \arg(G(i\omega)) = 90^\circ + \arg(G(i\omega))$$

   Fasen vrids 90°.
   Nyquistkurvan kommer då att skära reella axeln vid $\omega = 1.37$ och ha amplitud $|K_D\omega||G(i1.37)| \approx K_d \cdot 1.37 \cdot 0.25 \approx 0.33K_d$.
   Stabilt om $-0.33K_D$ ligger till höger om $-1 \implies$
   $-0.33K_D \geq -1 \Leftrightarrow K_D \leq 3$.

5. (a) $S(s)$ är överföringsfunktionen från störsignal till utsignal. För att undertrycka en störning av frekvens ω ska $|S(i\omega)| < 1$. $-G_c(s)$ är överföringsfunktionen från

mätbruset till systemets utsignal. För att undertrycka mätbrus av frekvens ω ska $|G_c(i\omega)| < 1$. Vi har följande samband mellan $S(s)$ och $G_c(s)$

$$S(s) + G_c(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} + \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = 1.$$

På grund av detta samband så kan inte både $S(s)$ och $G_c(s)$ göras små oberoende av varandra. Således kan vi inte både undertrycka störningen och mätbruset godtyckligt mycket samtidigt.

(b) $S(s)$ är stabil så vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} S(s) = \{\text{nollställe i origo}\} = 0.$$

(c) Det slutna systemets överföringsfunktion blir

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K_P(s-2)}{(s-1)(s-3) + K_P(s-2)}.$$

Den karakteristiska ekvationen är alltså

$$P(s) + K_P Q(s) = (s-1)(s-3) + K_P(s-2) = 0.$$

Rotorten har två startpunkter, $s = 1$ och $s = 3$, och en ändpunkt i $s = 2$. En av rotortens grenar kommer att gå mot oändligheten. Enligt Resultat 3.2 i Glad & Ljung tillhör de delar av reella axeln som har ett udda antal start- och ändpunkter till höger rotorten. Alltså tillhör intervallen $s < 1$ och $2 < s < 3$ rotorten enligt figur 1.

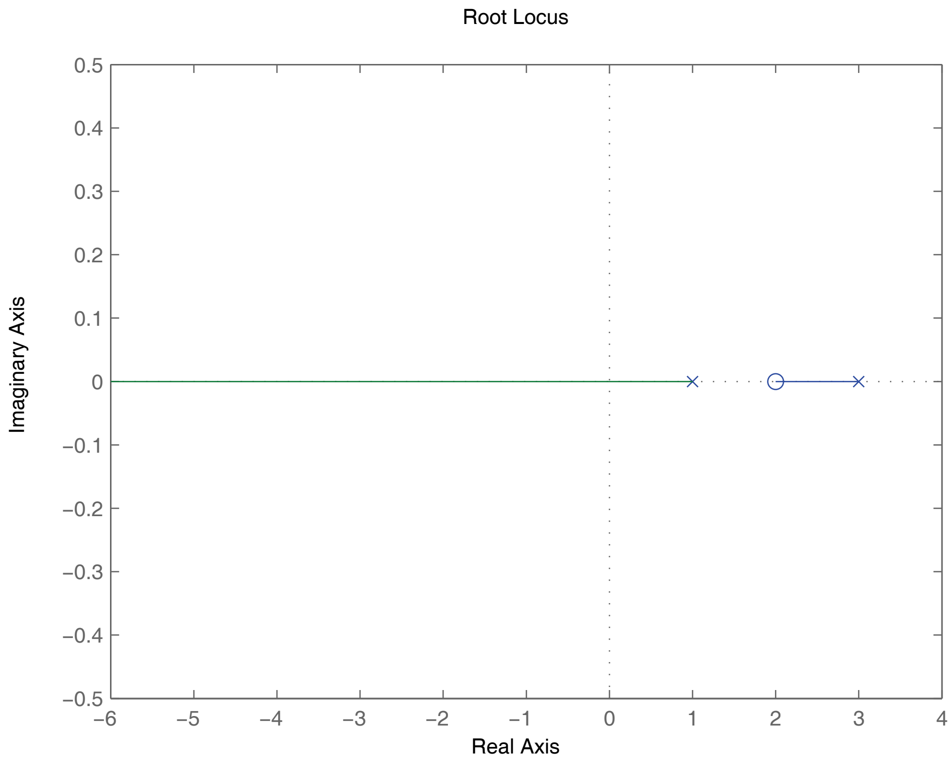
Eftersom en rot (den i intervallet $2 < s < 3$) ligger i högra halvplanet oavsett storleken på K_P kan slutna systemet aldrig bli stabilt.

(d) För ett minfasystem $F(s) = K_P \dfrac{B(s)}{A(s)}$ (där $A(s), B(s)$ är polynom med normaliserade högstagradskoefficienter och K_P en positiv konstant) gäller att rötterna till $A(s) = 0$ (polerna) och $B(s) = 0$ (nollställena) ligger i vänstra komplexa halvplanet, se Resultat 5.1 i Glad & Ljung.

Det slutna systemets karakteristiska ekvation blir

$$P(s) + K_P Q(s) = A(s)(s-1)(s-3) + K_P B(s)(s-2) = 0.$$

Alltså kommer $F(s)$ bara att tillföra start- och ändpunkter för rotorten i vänsta komplexa halvplanet. Enligt Resultat 3.2 i Glad & Ljung tillhör då intervallet $2 < s < 3$ rotorten oberoende av valet av $A(s), B(s), K_P$. Slutna systemet kommer alltså alltid ha en instabil pol i det intervallet och vi kan aldrig stabilisera $G_o(s)$ med en minfasregulator $F(s)$. (I själva verket kan man visa att regulatorn måste vara instabil.)



Figur 1: Rotort i Uppgift 5c.