Lösningar till Tentamen i Reglerteknik AK EL1000/EL1100/EL1120
2011-01-13

1a. Överföringsfunktionen från $u(t)$ till y(t) ges av

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Utsignalen ges av

$$y(t) = |G(i\omega)|\, A \sin\left(\omega t + \varphi + \arg G(i\omega)\right) = 2\sin(2t).$$

Identifierar ω=2.

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow A = 2\sqrt{5}.$$

$$\arg G(i\omega) = \arg 1 - \arg\left(i\omega + 1\right) = -\arctan\omega = -\arctan 2 \quad \rightarrow \varphi = \arctan 2.$$

En alternativ lösning är att direkt sätta in y i diff-ekvationen,

$$u(t) = \dot{y}(t) + y(t) = 4\cos(2t) + 2sin(2t) = \sqrt{4^2+2^2}\sin(2t+\varphi), \quad \varphi = \arctan(4/2)$$

Svar: $\omega = 2$, $A = 2\sqrt{5}$ och $\varphi = \arctan 2$.

1b. Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{s}{s+1}.$$

PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K_P + \frac{K_I}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{10}{s+1}\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)} = \frac{s}{s+1}.$$

Identifierar $K_P = K_I = 0.1$.
Svar: PI regulatorn är $F(s) = 0.1 + \frac{0.1}{s}$.

1c. Stationära punkter är $x^* = y^* = 0 \Rightarrow$ linjär approximation $\dot{x}(t) = 0$ med $y(t) = x(t)$.

1d. PI-regulatorn ges av

$$F(s) = K + \frac{K}{T_I s}.$$

Regulatorn är alltså

$$T_I\dot{u}(t) = KT_I\dot{e}(t) + Ke(t).$$

Euler bakåt ger

$$T_I(u(t) - u(t-1)) = KT_I(e(t) - e(t-1)) + Ke(t)$$

$$\Rightarrow u(t) = u(t-1) + \frac{KT_I + K}{T_I}e(t) - Ke(t-1).$$

Identifierar $K = T_I = 1$.

Svar: $K = T_I = 1$.

2a. Tillståndsvektor $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \; x_2(t) \; x_3(t) \end{bmatrix}^T$, insignal $u(t)$ och utsignal $y(t) = x_3(t)$ ger följande tillståndsmodell

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$
$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x(t)$$

2b. Observatören ges av

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) = (A - KC)\hat{x} + Bu + Ky$$

där $K = \begin{bmatrix} k_1 \; k_2 \; k_3 \end{bmatrix}^T$ väljs så att observatören får önskade poler. Observatörens poler ges av egenvärdena till matrisen $A - KC$. Egenvärdena ges av lösningen till den karakteristiska ekvationen

$$\det(sI - A + Kc) = \begin{vmatrix} s & 0 & k_1 \\ -1 & s & k_2 \\ 0 & -1 & s + k_3 \end{vmatrix} =$$
$$s(s(s + k_3) + k_2) + k_1 = s^3 + k_3 s^2 + k_2 s + k_1 = 0$$

Vi vill ha observatörspolerna i -2. Alltså vill vi ha karakteristiska ekvationen

$$(s + 2)^3 = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

som har tre lösningar $s = -2$. Identifiering av termer ger

$$k_1 = 8$$
$$k_2 = 12$$
$$k_3 = 6.$$

2c. Rita rotorn med avseende på k. Karakteristiska ekvationen är

$$s^3 + k(s^2 + s + 1) = P(s) + kQ(s) = 0$$

Startpunkter: $P(s) = 0$, $n = 3$, 3 st i $s = 0$.
Ändpunkter: $Q(s) = 0$, $m = 2$, $s^2 + s + 1 = 0 \implies s = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
Asymptoter: $n - m = 3 - 2 = 1$, riktning π.
Delar av reella axeln: hela negativa reella axeln.
Skärningar med imaginära axeln fås genom insättning av $s = i\omega$ i

$$s^3 + k(s^2 + s + 1) = 0.$$

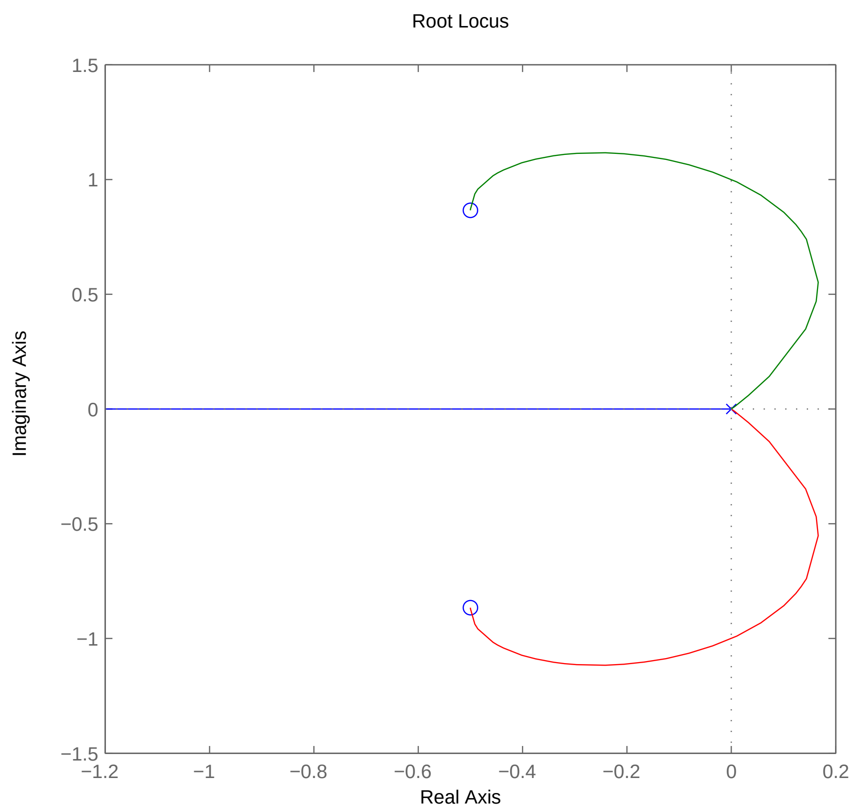
vilket ger

$$-i\omega^3 - k\omega^2 + ik\omega + k = 0.$$

Uppdelning i real- och imaginärdel:

$$-k\omega^2 + k = 0$$
$$-\omega^3 + k\omega = 0$$

Den andra ekvationen ger lösningar $\omega = 0$ och $\omega = \pm\sqrt{k}$. Insatt i den övre ekvationen ger detta att $k = 0$ och $k = 1$. Skärningarna blir alltså i $\omega = 0$, $k = 0$ (startpunkt) och $\omega = 1$, $k = 1$. Rotorten är återgiven i figur 1. Från figuren ses att alla poler ligger i



Figur 1: Rotort för uppgift 2c

vänster halvplan för $k \geq 1$ och observatörsdynamiken är alltså stabil för $k \geq 1$.

3a Skärfrekvens och fasmarginal för P-regulatorn beräknas eller läses ur Bode-diagram till

$$\omega_{c,p} = 2\text{rad/s}$$
$$\varphi_{m,p} = 33^\circ$$

Snabbheten är kopplad till skärfrekvensen. För att få ett dubbelt så snabbt system så ska skärfrekvensen fördubblas. Alltså $w_{c,d} = 4$. Inför lead-länk

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}$$

Vid önskade skärfrekvensen är fasen ungefär -190°. Lead-länken måste alltså ge en fasökning på $43^\circ + 6^\circ = 49^\circ$ (6 grader extra för lag-länk), vilket motsvarar $\beta \approx 0.14$. τ_D väljs som

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 0.67.$$

För att få den önskade skärfrekvensen bestäms K enligt

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_{c,d})|} = \frac{0.37}{0.17} \approx 2.18.$$

Vi har en integrator i systemet så vi kommer inte att ha något stationärt fel då referenssignalen är ett steg. För att inte få något stationärt fel då referenssignalen är en ramp krävs att vi har två integratorer i det öppna systemet. Vi måste därför införa en extra integrator. Detta görs genom att lägga till en lag-länk

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}$$

med $\gamma = 0$. τ_I väljs enligt tumregel till

$$\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = 2.5$$

Regulator ges alltså av:

$$F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s) = 2.18\frac{0.67s + 1}{0.09s + 1}\frac{2.5s + 1}{2.5s}$$

Vilken kan verifieras att ge $\omega_c = 3.95$ rad/s and $\varphi_m = 35^\circ$.

3b. Anta att det verkliga systemet istället innehåller en tidsfördröjning, $T = 1$ alltså

$$G^0(s) = G(s)e^{-s}.$$

Då är öppna systemet $F(s)G(s)e^{-s}$. Hur påverkar tidsfördröjningen Bode-diagrammet?
Amplitud: $\left|F(i\omega)G(i\omega)e^{-i\omega}\right| = \left|F(i\omega)G(i\omega)\right| \left|e^{-i\omega}\right| = \left|F(i\omega)G(i\omega)\right|$.
Amplituden påverkas inte!
Fasen: $\arg(F(i\omega)G(i\omega)e^{-i\omega}) = \arg(F(i\omega)G(i\omega)) + \arg(e^{-i\omega}) = \arg(F(i\omega)G(i\omega)) - \omega$.

Fasen förskjuts med ω radianer!

Skärfrekvensen kommer att vara den samma, alltså $\omega_c = 4$ men fasmarginalen kommer att minska med $\omega_c = 4$ radianer. Den nya fasmarginalen blir alltså $\varphi_m = 33° - \frac{4 \cdot 180}{\pi} \approx 33 - 229° = -196°$. Med en tidsfördröjning på 1 s så får vi negativ fasmarginal, alltså ett instabilt system. Så regulatorn i a) fungerar inte om det verkliga systemet har en tidsfördröjning på 1 s.

4a. Överföringsfunktionen från $v(t)$ till $y(t)$ ges av

$$G_{vy} = \frac{1}{1+GF}.$$

Stegsvaret är givet som $y(t) = 0.2 + 0.8e^{-t}$. Laplace transformering ger

$$Y(s) = \frac{s+0.2}{s+1}\frac{1}{s} = \frac{s+0.2}{s+1}V(s)$$

Följaktligen är

$$G_{vy}(s) = \frac{s+0.2}{s+1}, \quad GF = \frac{0.8}{s+0.2}$$

Överföringsfunktionen från $w(t)$ till $y(t)$ ges av

$$G_{wy} = -\frac{GF}{1+GF} = -[1 - G_{vy}] = \frac{-0,8}{s+1}.$$

Slutvärdessatsen (systemet är stabilt) ger $\lim_{t\to\infty} y(t) = -0.8 \times -0.1 = 0.08$.

Svar: $G_{wy} = \frac{-0,8}{s+1}$ och stationära värdet på y är 0.08.

4b. (Antag $r(t) = w(t) = 0$.) Överföringsfunktionen från $v(t)$ till $y(t)$ ges av

$$G_{vy} = \frac{1}{1+GFK_\Delta} = \left[GF = \frac{0.8}{s+0.2}\right] = \frac{1}{1+\frac{0.8K_\Delta}{s+0.2}} = \frac{s+0.2}{s+0.2+0.8K_\Delta}.$$

Överföringsfunktionen från $w(t)$ till $y(t)$ ges av $G_{wy} = -[1 - G_{vy}]$. Slutvärdesatsen (det återkopplade systemet är stabilt för $K_\Delta > 0$) ger

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} y_v(t) &= \frac{0.2}{0.2+0.8K_\Delta} \\
\lim_{t\to\infty} y_w(t) &= -[1 - \frac{0.2}{0.2+0.8K_\Delta}] \times (-0.1) \\
\lim_{t\to\infty} y_v(t) &= \lim_{t\to\infty} y_w(t) \quad \Rightarrow \\
\frac{0.2}{0.2+0.8K_\Delta} &= 0.1[1 - \frac{0.2}{0.2+0.8K_\Delta}] \quad \Rightarrow K_\Delta = 2.5
\end{aligned}$$

Svar: Vid $K_\Delta = 2.5$ fås stationära värden 1/11.

5a Det slutna systmets överföringsfunktion är

$$G_c(s) = \frac{K}{s+K+a}, \quad K > -a$$

och stegsvaret är

$$y(t) = \frac{K}{K+a}(1 - e^{-(K+a)t}]$$

och motsvarande lutning/derivata är

$$\dot{y}(t) = \frac{K(K+a)}{K+a}e^{-(K+a)t} = Ke^{-(K+a)t}$$

Maximal lutning är för $t = 0$ vilket kombinerat med definitionen av stigtid ger

$$\dot{y}(0) = K \leq \frac{1}{\bar{T}_r}$$

Maximala positiva reglerfelet för ett första ordningens system ges för $t \to \infty$, dvs

$$\bar{M} = \frac{K}{K+a} - 1 = \frac{-a}{K+a} \geq \frac{-a}{K} \geq (-a)\bar{T}_r$$