REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Kortfattade lösningsförslag till tentamen 2011–06–10, kl. 14.00–19.00

1. (a) (i): $Y = G_1G_2(F_rR - F_yY) \Rightarrow Y = \dfrac{G_1G_2F_r}{1+G_1G_2F_y}R$. Svar: $\dfrac{G_1G_2F_r}{1+G_1G_2F_y}$

   (ii): $Y = G_2(D + G_1F_fD - G_1F_yY) \Rightarrow Y = \dfrac{G_2(1+G_1F_f)}{1+G_1G_2F_y}D$. Svar: $\dfrac{G_2(1+G_1F_f)}{1+G_1G_2F_y}$

   (b) Enligt boken (eller så inses det från överföringsfunktionen ovan) så elimineras d om $F_f(s) = -1/G_1(s)$. I detta fallet alltså $F_f(s) = -\dfrac{s^2+2s+1}{s+2}$.
   (Detta val av $F_f(s)$ kan dock ej implementeras eftersom det har deriverande verkan för höga frekvenser.) För att eliminera konstanta störningar räcker det att framkoppla med den statiska förstärkningen av $F_f(s)$, d.v.s. $F_f(0) = -1/2$.

   (c) (i) Laplacetransformen av insignalen är $U(s) = 1/s$ och av utsignalen $Y(s) = \dfrac{2}{s(3s+1)}$. Överföringsfunktionen ges av $G(s) = Y(s)/U(s) = \dfrac{2}{3s+1}$. Alternativt kan relation (A.33) tillsammans med (A.5) i boken användas direkt. Impulssvaret kan t.ex. fås från tidsderivatan av stegsvaret, d.v.s., $\dot{y}(t) = \dfrac{2}{3}e^{-t/3}$. Alternativt beräknas den inversa Laplacetransformen av $G(s)$.

2. (a) Systemet är styrbart om styrbarhetsmatrisen

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   har full rang (vilket motsvarar inverterbarhet i detta fall). Vi ser att $\det(\mathcal{C}) = 1$, och systemet är styrbart. Systemet är observerbart om observerbarhetsmatrisen

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

   har full rang (vilket motsvarar inverterbarhet i detta fall). Vi ser att $\det(\mathcal{O}) = -10$, och systemet är observerbart.

   (b) Antag $u = -Lx + l_0r = -(l_1 \quad l_2)x + l_0r$ och

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-Lx + l_0r) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2-l_1 & -1-l_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \end{bmatrix} r.\end{aligned}$$

Slutna systemets poler ges av egenvärdena till matrisen A_c,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 - l_1 & -1 - l_2 \end{bmatrix},$$

och

$$\det(\lambda I - A_c) = \lambda^2 + l_2\lambda - (l_1 + l_2 - 1) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Detta ger $l_1 = -4$, and $l_2 = 3$. Den statiska förstärkningen mellan r och y ska vara 1,

$$1 = C(-A + BL)^{-1}Bl_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 & -0.5 \\ 3.0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \end{bmatrix} = -1.5l_0$$

och ger $l_0 = -2/3$.

(c) Antag $u = -Ky + l_0 r$, och

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-Ky + l_0 r) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (-K[2 \quad 1]x + l_0 r) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 - 2K & -1 - K \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ l_0 \end{bmatrix} r. \end{aligned}$$

Slutna systemets poler ges av egenvärdena till matrisen A_c,

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 - 2K & -1 - K \end{bmatrix},$$

och

$$\det(\lambda I - A_c) = \lambda^2 + K\lambda + (1 - 3K) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2.$$

Om slutna systemets poler ska hamna i -1 och -2, krävs $K = 3$ samtidigt som $1 - 3K = 2$, vilket saknar lösning K. Alltså kan problemet inte lösas med enkel proportionell utsignalåterkoppling.

3. (a) G_3 och G_4 har oändlig förstärkning för frekvensen $\omega = 0$, och motsvarande stegsvar för slutna systemen ($G_3/(1 + G_3)$ och $G_4/(1 + G_4)$) ska gå mot 1. Alltså är stegsvar A och D aktuella. Men G_3 har högre skärfrekvens och lägre fasmarginal, så $G_3 \leftrightarrow A$ och $G_4 \leftrightarrow D$. G_1 och G_2 har samma skärfrekvens men G_2 har lägre fasmarginal. Alltså $G_1 \leftrightarrow B$ och $G_2 \leftrightarrow C$.

(b) K_p lyfter eller sänker amplitudkurvan G_2, och lämnar faskurvan oförändrad. Enligt Nyquistkriteriet börjar slutna systemet självsvänga med frekvensen ω_d då $K_p G_2(j\omega_d) = -1$. Vi ser att $\arg G_2(j\omega_d) = -180^\circ$ då $\omega_d = 3$ rad/s och $G_2(j3) = -0.55$. Alltså $K_p \approx 1/0.55 = 1.82$ och periodtiden är $2\pi/3 \approx 2.1$ s.

(c) En I-regulator sänker fasen i G_2 med $90°$ och ändrar förstärkningen med K_I/ω. Enligt Nyquistkriteriet börjar slutna systemet självsvänga med frekvensen ω_d då $K_I G_2(j\omega_d)/(j\omega_d) = -1$. Vi ser att $\arg G_2(j\omega_d) = -90°$ då $\omega_d = 1.3$ rad/s och $G_2(j1.3) = -1.22j$. Alltså $K_I(-1.22j)/(j1.3) = -1$ och stbilitet för $K_I \leq 1.07$ följer.

4. (a) Vi söker $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$. Vi börjar med den fasavancerande länken

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}.$$

Den nya skärfrekvensen är $w_{c,d} = 30$ rad/s.

Eftersom $\varphi_m = 40°$ och $\varphi_m = \arg(F(iw_{c,d})G(iw_{c,d})) + 180° = \arg(F_{lead}(iw_{c,d})) + \arg(F_{lag}(iw_{c,d})) + \arg(G(iw_{c,d})) + 180°$, så får vi $\arg(F_{lead}(iw_{c,d})) = -140° - \arg(F_{lag}(iw_{c,d})) - \arg(G(iw_{c,d}))$. Från bodediagrammet har vi $\arg(G(iw_{c,d})) \approx -180°$ och från tumregeln om fasretarderande länkar, vet vi att den minskar fasen med $6°$ för lämpliga parameterval. Alltså $\arg(F_{lead}(iw_{c,d})) = -140° + 6° + 180° = 46°$ och $\beta = 0.17$. Med detta β får vi $\tau_D = (w_{c,d}\sqrt{\beta})^{-1} = 0.0812$.

Vi väljer K så att $w_{c,d} = 30$: $|F(iw_{c,d})G(iw_{c,d})| = 1$. Detta ger

$$|F_{lead}(iw_{c,d})||F_{lag}(iw_{c,d})||G(iw_{c,d})| = 1.$$

Från tumregeln följer $|F_{lag}(iw_{c,d})| \approx 1$, och

$$\frac{K}{\sqrt{\beta}}\frac{|k_1|}{|iw_{c,d}(iw_{c,d}+a)(iw_{c,d}+b)|} = 1,$$

vilket ger $K = 395.17$.

Den fasretarderande länken ges av

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma},$$

och enligt tumreglen ska $\tau_I = 10/w_{c,d} = 0.33$. Vi vill välja γ så att statiska felet vid steginsignaler är noll. Enligt slutvärdesteoremet (slutna systemet är asymptotiskt stabilt, se ovan)

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1 + F_{lead}(s)F_{lag}(s)G(s)}\frac{1}{s},$$

vilket ger

$$\lim_{s\to 0}\frac{(s+a)(s+b)(s+c)(\beta\tau_D s+1)(\tau_I s+\gamma)}{(s+a)(s+b)(s+c)(\beta\tau_D s+1)(\tau_I s+\gamma) + Kk_1(\tau_D s+1)(\tau_I s+1)} = \frac{abc\gamma}{abc\gamma + Kk_1}.$$

Alltså ska vi välja $\gamma = 0$.

Den resulterande regulatorn ges av

$$F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s) = 395.17\frac{0.0812s+1}{0.0137s+1}\frac{0.33s+1}{0.33s}.$$

(b) Den verkliga öppna loopen ges av $F(s)G^0(s) = F(s)G(s)e^{-T_d s}$. Notera att $|F(jw)G^0(jw)| = |F(jw)G(jw)e^{-jT_d w}| = |F(jw)G(jw)||e^{-jT_d w}| = |F(jw)G(jw)|$, medan $\arg(F(jw)G^0(jw)) = \arg(F(jw)G(jw)) - T_d w$. Eftersom tidsfördröjningen bara påverkar fasen tittar vi på fasmarginalen. Regulatorn är designad så att $\varphi_m = 40° = \frac{40°}{180°}\pi$ rad. Alltså $\varphi_m^0 = \varphi_m - T_d w_c$. Slutna systemet är stabilt om $\varphi_m^0 > 0$, vilket ger $\varphi_m - T_d w_c > 0 \Leftrightarrow T_d < \frac{\varphi_m}{w_c} = 0.0233$ s.

(c) Slutna systemets (G_c) snabbhet ges av dess bandbredd, vilken är $w_B \approx 50$ rad/s. Ett lågpassfilter $F_r(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ uppfyller $|F_r(jw)| \approx 1$ för $w < \tau^{-1}$, medan för $w > \tau^{-1}$ avtar förstärkningen med lutning -1 i ett bodediagram. Approximativt gäller då att F_r bara reducerar hela systemets bandbredd om $w_B > \tau^{-1}$, vilket ger $\tau > w_B^{-1} = \frac{1}{50}$.

5. (a) Vi börjar med att skriva modellen på tillståndsform, $\dot{x} = f(x, u)$. Om tillståndsvektorn väljs som

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

kan ekvationerna skrivas

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= Ku = f_1(x, u) \\
\dot{x_2} &= x_3 = f_2(x, u) \\
\dot{x_3} &= -\frac{m}{m + J/r^2} g \sin x_1 + \frac{m}{m + J/r^2} x_2 K^2 u^2 = f_3(x, u)
\end{aligned}$$

Vid jämviktspunkten gäller $f(x_0, u_0) = 0$, vilket ger

$$\begin{aligned}
x_0 &= [0 \quad z_0 \quad 0]^T \\
u_0 &= 0,
\end{aligned}$$

för valfri konstant z_0, då $u_0 = \theta_0 = \dot{z}_0 = 0$ enligt uppgiften. Vi väljer $z_0 = 0$ i fortsättningen. Jakobianerna blir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{7} g \cos x_1 & \frac{5}{7} K^2 u^2 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial f}{\partial u} &= \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ \frac{10}{7} K^2 x_2 u \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

I jämviktspunkten får vi

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{7}g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0) = \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beteckna $\triangle x = x - x_0$ och $\triangle u = u - u_0$. Det linjäriserade systemet ges då av

$$\dot{\triangle} x = A\triangle x + B\triangle u.$$

(b) Om $y = \theta$ så $\dot{y} = Ku$. För $kT \leq t < (k+1)T$, har vi

$$\dot{y}(t) = Ku_k.$$

Integrerar vi över samplingsintervallet fås

$$y(kT + T) - y(kT) = \int_{kT}^{kT+T} Ku_k dt = TKu_k$$

Med $y(kT) = y_k$, fås

$$y_{k+1} = y_k + TKu_k.$$

(c) Med $u_k = -K_p y_k$, får vi $y_{k+1} = (1 - K_p TK)y_k$.
För asymptotisk stabilitet ($y_k \to 0$, $k \to \infty$) krävs $|1 - K_p TK| < 1$. Detta ger oss $0 < K_p < \frac{2}{KT}$.