Reglerteknik AK Tentamen 2012-02-18
Lösningsförslag

Uppgift 1a

Eftersom $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$,

$G(s) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(s) = \dfrac{\begin{pmatrix} -s-2 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(s) = \dfrac{-s-2+2s+2}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow G(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$

Svar: Nollställen : $\{0\}$, Poler : $\{-1, -2\}$ i höger halvplan

Uppgift 1b

Slutna systmet ges av

$$G_c(s) = \frac{\frac{K}{(s-1)(s+1)}}{1 + \frac{K}{(s-1)(s+1)}} = \frac{K}{(s-1)(s+1) + K} = \frac{K}{s^2 - 1 + K}$$

Poler: $p_{1,2} = \pm\sqrt{1-K}$.
För $K = 0$ så har $G_c(s)$ en pol i -1 (instabilt) och en i 1
För $0 < K < 1$ så har $G_c(s)$ en pol i $-\sqrt{1-K}$ (instabilt) och en i $\sqrt{1-K}$
För $K = 1$ så har $G_c(s)$ en dubbelpol i 0 (instabilt)
$K > 1$, så har $G_c(s)$ två rent imaginära poler i $\pm\sqrt{K-1}i$ (instabilt).
Svar: $K = \{\emptyset\}$. Inget $K \geq 0$ ger ett asymptotiskt stabilt återkopplat system

Uppgift 1c

$$G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad \Rightarrow \quad G_o(s) = \frac{G_c(s)}{1 - G_c(s)} = \frac{1/(s+1)}{1 - 1/(s+1)} = \frac{1}{s}$$

Svar:
Skärfrekvens: $|G_o(i\omega)| = 1 \Rightarrow |G_o(i\omega)| = |\frac{1}{\omega_c}| = 1 \Rightarrow \omega_c = 1$.
Fasmarginnal: $\varphi_m = 180° + \arctan(\frac{1}{i\omega}) = 90°$.

Uppgift 1d

$$U(s) = F(s)E(s) \;\Rightarrow\; U(s) = 10\frac{s+0.1}{s}E(s) \;\Rightarrow\; sU(s) = 10sE(s) + E(s)$$

vilket ger $\dot{u}(t) = 10\dot{e}(t) + e(t)$. Kursboken sidan 211, Euler bakåt
$\frac{1}{T}(u(t) - u(t-T)) = 10\frac{1}{T}(e(t) - e(t-T)) + e(t)$
$\Rightarrow u(t) - u(t-T) = 10e(t) - 10e(t-T) + Te(t)$
$\Rightarrow u(t) = u(t-T) + (10+T)e(t) - 10e(t-T)$ med $T = 0.2$
Svar: $u(t) = u(t-0.2) + 10.2e(t) - 10e(t-0.2)$

Uppgift 2a

Testa om systemt är observerbart(behövs ej för att lösa uppgiften)

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0 \quad \text{OK}$$

Observatör:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Skattningsfelet, $\tilde{x} = x - \hat{x}$, ges av $\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x}$
Egenvärden (poler): $\det(sI - (A - KC)) = s^2 + (k_2+2)s + 3k_2 - k_1 + 2 = 0$
Önskade egenvärden: $(s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$. vilket ger $k_2 + 2 = 2\alpha$ and $3k_2 - k_1 + 2 = \alpha^2$, och

$$k_1 = -\alpha^2 + 6\alpha - 4, \; k_2 = 2(\alpha - 1)$$

Svar:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -\alpha^2 + 6\alpha - 4 \\ 2(\alpha - 1) \end{bmatrix} \left(y(t) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}(t)\right)$$

Uppgift 2b

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - K(y_m - C\hat{x}) = (A - KC)\tilde{x} - K\epsilon$$

Eftersom observatörsdynamiken är stabil så $\dot{\tilde{x}} \rightarrow 0$ när $t \rightarrow \infty$ och följaktligen
Svar:

$$\lim_{t\rightarrow\infty} \tilde{x}(t) = (A - KC)^{-1}K\epsilon = \frac{\epsilon}{-k_1 + 3k_2 + 2}\begin{bmatrix} k_1 - 5k_2 \\ k_1 - 3k_2 \end{bmatrix} = \frac{\epsilon}{\alpha^2}\begin{bmatrix} -\alpha^2 - 4\alpha + 6 \\ -\alpha^2 + 2 \end{bmatrix}$$

Uppgift 2c

Bestäm stationära punkter för $u^0 = 1$:

$$f_1 = \dot{x}_1(t) = \frac{-1}{3/4 + x_2^2(t)} + x_1(t)u(t) = 0$$
$$f_2 = \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2^2(t) + \frac{3}{4}u(t) = 0$$

Andra ekvationen ger $x_2^2(t) + \frac{3}{4} = x_1(t)$, vilket insatt i första ekvationen medför

$$x_1^2(t) = 1 \to x_1(t) = \pm 1$$

Endast den positiva lösningen är tillåten, och för $x_1(t) = 1$ får vi $x_2(t) = \pm 1/2$. Vi har två stationära punkter med $u^0 = 1$,

$$[x^0]_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad [x^0]_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Låt Δx och Δu beteckna avvikelse från stationär punkt. Det linjäriserade systemt ges då av $\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u$, där

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} u & \frac{1}{(x_2^2+3/4)^2}(2x_2) \\ -1 & 2x_2 \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)},$$
$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3/4 \end{bmatrix}_{(x^0,u^0)}$$

Svar:

$$\text{Runt: } [x^0]_1: \quad \dot{\Delta x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \Delta u(t)$$
$$\text{Runt: } [x^0]_2: \quad \dot{\Delta x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Delta x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \Delta u(t).$$

Uppgift 3

3 gånger snabbare än med en P-regulator med $F(s) = 1$

Vi hittar först skärfrekvensen ω_c vid P-reglering. Beloppskurvan för det öppna systemet är

$$|G_o| = |F\frac{1}{s}G| = |\frac{1}{s}G| = |\frac{1}{s}||G|.$$

Per definition är $|G_o(i\omega_c)| = 1$, alltså har vi

$$|G_o(i\omega_c)| = |\frac{1}{i\omega_c}||G(i\omega_c)| = 1, \quad \Rightarrow |G(i\omega_c)| = |i\omega_c| = \omega_c.$$

I bodediagrammet tittar vi på magnituden vid den horisontella delen, där beloppet är ca $0,33$, och noterar att även vid frekvensen $\omega = 0,33$ rad/s är beloppet $0,33$. Alltså är skärfrekvensen $\omega_c \approx 0,33$ rad/s (egentligen 0,35). För att få ett 3 gånger snabbare system så ska vi välja en ny skärfrekvens som är 3 gånger så stor,

$$\Rightarrow \omega_{c,d} = 1 \text{ rad/s}.$$

Samma översläng som för P-regulatorn

Om vi vill behålla samma översläng så ska vi, enligt tumregel, behålla samma fasmarginal. Vi hittar först fasmarginalen vid P-reglering. Argumentskurvan för det öppna systemet är

$$\arg(G_o) = \arg(F\frac{1}{s}G) = \arg(\frac{1}{s}) + \arg(G) = -90^{\mathrm{o}} + \arg(G).$$

Per definition så är $\varphi_m = \arg(G_o(i\omega_c)) - (-180^{\mathrm{o}})$. Alltså har vi

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \arg(G_o(i\omega_c)) - (-180^{\mathrm{o}}) \\ &= \arg(G(i\omega_c)) + 90^{\mathrm{o}} \\ &\approx -35^{\mathrm{o}} + 90^{\mathrm{o}} = 55^{\mathrm{o}}.\end{aligned}$$

Fasmarginalen vid den önskade skärfrekvensen, ω_c, ges av

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_m &= \arg(G_o(i\omega_{c,d})) - (-180^{\mathrm{o}}) \\ &= \arg(G(i\omega_{c,d})) + 90^{\mathrm{o}} \\ &\approx -110^{\mathrm{o}} + 90^{\mathrm{o}} = -20^{\mathrm{o}}.\end{aligned}$$

Följaktligen så vill vi höja fasen med $\varphi_m - \tilde{\varphi}_m = 75^{\mathrm{o}}$. I och med att vi kommer introducera en lag-del så vill vi, enligt tumregel, höja fasen ytterligare $5,7^{\mathrm{o}}$.

$$\Rightarrow \text{Fashöjningen är } 81^{\mathrm{o}}.$$

Lead-delen

Vi kan nu bestämma de olika parametrarna i lead-delen. Eftersom fashöjningen är större än 45^{o} så delar vi upp lead-delen i två lika delar

$$F_{lead}(s) = K\left(\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\right)^2,$$

där vi höjer fasen med 40.5° i varje. β fås ur figur 5.13 i kursbok till 0,22. τ_D fås från tumregeln, $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} = 2,13$. K bestäms så att den önskade skärfrekvensen blir den faktiska skärfrekvensen, (notera att vi har två lead-delar som bidrar med en faktor $\sqrt{\beta}$ var)

$$|G_o(i\omega_{c,d})| = |F_{lead}(i\omega_{c,d})||G(i\omega_{c,d})| \approx \frac{K}{\sqrt{\beta}^2} \cdot 0,2 = 1 \Rightarrow K \approx 1,1.$$

$$\Rightarrow F_{lead}(s) = 1,1 \left(\frac{2,13s+1}{0,22 \cdot 2,13s+1} \right)^2.$$

Statiska felet vid en ramp som insignal ska vara mindre än 0,5

För att uppfylla detta så introducerar vi en lag-länk,

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma}.$$

Lag-delen

τ_I fås från tumregeln, $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = 10$. γ bestäms så att kravet på felet är uppfyllt.

$$e_1 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG_o(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sF\frac{1}{s}G} = \frac{5000\gamma}{1800K} < 0,5$$
$$\Rightarrow \gamma = 0,198 \approx 0,2.$$

$$\Rightarrow F_{lag}(s) = \frac{10s+1}{10s+0,2}.$$

Svar: $F(s) = 1,1 \left(\frac{2,13s+1}{0,22 \cdot 2,13s+1} \right)^2 \frac{10s+1}{10s+0,2}.$

Uppgift 4a

Först ska vi ta fram överföringsfunktionen mellan $r(t)$ och $y(t)$, alltså $G_c(s)$. Vi kan börja med att rita upp blockdiagrammet för systemet, se Fig. 1.

Det slutna systemet överföringsfunktion är

$$G_c(s) = \frac{G^0(s)F(s)}{1 + G^0(s)F(s)}$$

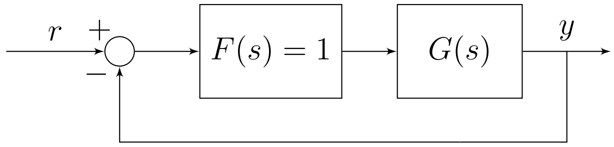

Figure 1: System för problem 4

Om vi stoppar in systemet $G^0(s) = \frac{1+\epsilon}{s(s+1)^2}$ och regulatorn $F(s) = 1$ får vi:

$$G_c(s) = \frac{1+\epsilon}{s(s+1)^2 + 1 + \epsilon}$$

Vi vill ha nämnaren på formen $P(s) + \epsilon Q(s)$ och vi inser att $P(s) = s(s+1)^2 + 1 = s^3 + 2s^2 + s + 1$ och $Q(s) = 1$. Startpunkterna ges av lösningarna till $P(s) = 0$, vilka vi fått i problemet, dvs -1.7549 och $-0.1226 \pm 0.7449i$. Ändpunkterna ges av $Q(s) = 0$ vilket saknar lösning. Vi kommer alltså inte att ha några ändpunkter.

Antalet asymptoter ges av "antal startpunkter" − "antal ändpunkter" vilket innebär att vi kommer att ha 3 st asymptoter. Dessa kommer att ha riktningarna $\frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3}$ för $k = 0, 1, 2$, och de kommer att skära varandra och den reella axeln i punkten $\frac{1}{3}((-1.7549 - 0.1226 + 0.7449i - 0.1226 - 0.7449i) - 0) = -0.6667$.

De delar av reella axeln som är med i rotorten har udda antal reella start- och ändpunkter till höger om sig. Här har vi bara en reell startpunkt i -1.7549 vilket indikerar att den del som är mindre än -1.7549 kommer att vara med i rotorten medan den del som är större inte kommer att vara det.

Stabilitetsgränsen ges av rotortens skärning med imaginära axeln. För att hitta dessa ansätter vi $P(i\omega) + \epsilon Q(i\omega) = 0$ och löser ut ϵ. Vi får

$$1 + \epsilon - 2\omega^2 + i(-\omega^3 + \omega) = 0 \tag{1}$$

Vi delar upp problemet och löser realdel och imaginärdel för sig. Från realdelen får vi

$$1 + \epsilon - 2\omega^2 = 0 \implies \epsilon = 2\omega^2 - 1 \tag{2}$$

Och från imaginärdelen får vi

$$\omega - \omega^3 = 0 \implies \omega_1 = 0,\ \omega_2 = 1,\ \omega_3 = -1 \tag{3}$$

Från detta inser vi att vi har $\epsilon = 1, \omega = \pm 1$ och $\epsilon = -1, \omega = 0$. Vi är intresserade av positiva ϵ och vi ser att vi skär imaginära axeln i $\pm i$ då $\epsilon = 1$. Vi sammanställer detta i en lista och anväder detta för att rita rotorten.

Startpunkter -1.7549 och $-0.1226 \pm 0.7449i$

Ändpunkter saknas

Delar av reella axeln $(-\infty, -1.7549]$ är med, resten är inte med.

Asymptoter 3 st asymptoter med riktnigarna $\frac{\pi}{3}$, π, och $\frac{5\pi}{3}$ som utgår från -0.6667.

Skärning med imaginära axeln rotorten skär imaginära axeln i $\pm i$ för $\epsilon = 1$

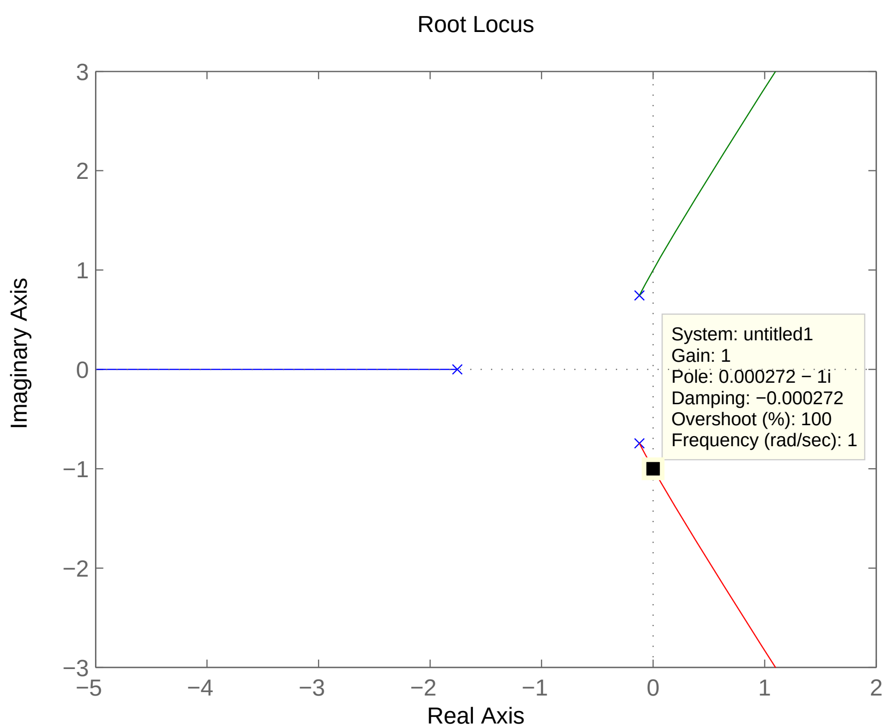

Figure 2: Rotort för problem 4

Vi inser när vi tittar på rotorten i Fig. 2 att alla poler kommer att ligga i det vänstra halvplanet för alla positiva $\epsilon < 1$. Därefter kommer de komplexkonjugerade polerna att gå in i höger halvplan och systemet blir instabilt för $\epsilon \geq 1$.

Uppgift 4b

Här ska vi använda robusthetskriteriet för att avgöra hur stora ϵ vi kan tolerera utan att bli instabila. För att göra det måste vi först få problemet på den form robusthetskriteriet utgår från. Från (6.6), sid 124, inser vi att vi vill dela upp $G^0(s)$ till

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)). \tag{4}$$

Vi vill veta något om hur ϵ påverkar systemet. Det leder oss till att välja $\Delta_G(s) = \epsilon$, dvs vi ser ϵ som en störning till vår modell. Vi får

$$\frac{1+\epsilon}{s(s+1)^2} = G(s)(1+\epsilon) \implies G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} \tag{5}$$

Vi har nu delat upp $G^0(s)$ på en sådan form att vi kan använda robusthetskriteriet för att ta reda på hur stort ϵ får vara utan att vi *riskerar* instabilitet. För att använda robusthetskriteriet måste vi även uppfylla ett antal antaganden. Först måste vi kontrollera att regulatorn vi har, $F(s) = 1$, faktiskt stabiliserar $G(s)$. Att den gör det inser vi t.ex. från rotorten i (a) där alla startpunkterna (som motsvarar $\epsilon = 0$, dvs $G^0(s) = G(s)$) ligger i vänster halvplan. Vidare måste vi anta att $G^0(s)$ och $G(s)$ har samma antal poler i höger halvplan, origo inräknat, samt att både $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ går mot noll då s går mot oändligheten (alltså att kretsförstärkningen är strikt proper). $G(s)$ och $G^0(s)$ har samma polpolynom, därför måste de även ha samma antal poler i höger halvplan och dessutom är båda är strikt propra vilket följdaktigen även $F(s)G(s)$ och $F(s)G^0(s)$ kommer att vara med $F(s) = 1$.

Eftersom alla antaganden ovan är uppfyllda kan vi använda det sista antagandet i robusthetskriteriet som ett villkor över vilka ϵ som garanterar stabilitet. Vi får att systemet är stabilt för alla ϵ som uppfyller

$$\epsilon < \frac{1}{|T(i\omega)|} \tag{6}$$

Vi kan nu gå vidare på flera sätt. Två ges här

Alternativ 1 - det enkla sättet

Vi har att $T(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+G(s)F(s)}$. Sätter vi in $G(s)$ och $F(s)$ får vi $T(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+s+1} = \frac{1}{(s+1.7549)(s^2+0.2452s+0.5699)}$. Om man skissar bodediagrammet till detta inser man att andragradstermen i polpolynomet leder till en resonanstopp nära $\omega_0 = \sqrt{0.5699} = 0.7549$. Om vi sen betraktar $1/T(s)$

inser vi att resonanstoppen i $T(s)$ kommer att vara ett minimum och vi får $\mathrm{argmin}_\omega 1/T(i\omega) \approx 0.7549$. Vi stoppar in detta i $1/T(i\omega)$ och får att $\min_\omega 1/T(i\omega) \approx 0.3535$. Detta ger att $\epsilon < 0.3535$ ger ett stabilt system enligt robusthetskriteriet.

Alternativ 2 - det jobbiga sättet

Vi får att

$$\epsilon < \frac{1}{|T(i\omega)|} = \frac{|1 + F(i\omega)G(i\omega)|}{|F(i\omega)G(i\omega)|} = \frac{|1 + \frac{1}{i\omega(i\omega+1)^2}|}{|\frac{1}{i\omega(i\omega+1)^2}|} = |i\omega(i\omega+1)^2+1|, \ \forall\omega \quad (7)$$

Vi får att $|i\omega(i\omega+1)^2+1| = |i(\omega-\omega^3)+1-2\omega^2| = \sqrt{(\omega-\omega^3)^2+(1-2\omega^2)^2}$. Eftersom det ska gälla för alla ω behöver vi hitta det minsta värde detta belopp kan anta. Vi deriverar med avseende på ω och får

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\omega}\sqrt{(\omega-\omega^3)^2+(1-2\omega^2)^2} = \\
&\frac{1}{2\sqrt{(\omega-\omega^3)^2+(1-2\omega^2)^2}}(2(\omega-\omega^3)(1-3\omega^2)+2(1-2\omega^2)(-4\omega)) = \\
&\frac{1}{2\sqrt{(\omega-\omega^3)^2+(1-2\omega^2)^2}}\frac{2\omega}{3}(\omega^4+\frac{4}{3}\omega^2-3)
\end{aligned}$$

Eftersom termen med roten är positiv för alla ω avgörs tecknet/rötter till derivatan av $\frac{2\omega}{3}(\omega^4+\frac{4}{3}\omega^2-3)$. Vi löser $\frac{2\omega}{3}(\omega^4+\frac{4}{3}\omega^2-3) = 0$ och får $\omega = 0$, $\omega = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{3}}$ som de intressanta reella lösningarna. Via teckenstudium (eller genom att tänka på hur bodediagrammet för $T(s)$ ser ut) kan vi sluta oss till att $\omega = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{3}}$ är ett minimum. För $\omega_0 = 0$ får vi $|i\omega_0(i\omega_0+1)^2+1| = 1$ och för $\omega_1 = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{13}}{3}}$ får vi $|i\omega_1(i\omega_1+1)^2+1| = 0.3472$. Vi inser av detta att 0.3472 är ett globalt minimum för $\frac{1}{|T(i\omega)|}$ och alltså att $\epsilon < 0.3472$ leder till ett garanterat stabilt system enligt robusthetskriteriet.

Slutsats

Vi ser att de båda sätten ger ϵ nära varandra, $\epsilon = 0.3472$ och $\epsilon = 0.3535$. Att det från alternativ 1 är högre beror på att minimat (resonanstoppen) inte hamnar exakt i ω_0, detta gör att vi får ett lite högre värde än vi borde ha (och vi uppfyller därför inte riktigt robusthetskriteriet.) Båda är dock betydligt mindre än det resultat vi fick i (a). Det beror på att robusthetskriteriet är ett tillräckligt men inte ett nödvändigt villkor för stabilitet!

Uppgift 5a

Se Uppgift 5b, med $T = 0$. Ingen överslång fås.

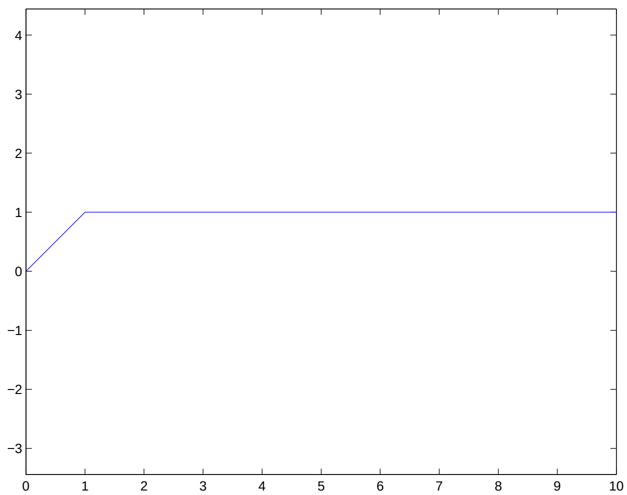

Figure 3: Till-från regulatorn utan tidsfördröjning.

Uppgift 5b

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } e(t) = r(t) - y(t) > 0 \;\Rightarrow\; y(t) < 1 \\ -1 & \text{om } e(t) = r(t) - y(t) < 0 \;\Rightarrow\; y(t) > 1 \end{cases}$$

Med fördröjning $\dot{y}(t) = u(t - T)$, och $u(t) = 0$ för $t < 0$, så är $y(t) = 0$ för $t < T$. Därefter är $\dot{y}(t) = u(t - T) = 1$ fram tills dess att $y(t - T) > 1$, dvs tills dess att $t = 1 + 2T$, varvid $\dot{y}(t) = -1$ fram tills dess att $y(t - T) < 1$ osv. Följande tabell visar brytpunkterna.

t	$u(t)$	$y(t)$	$\dot{y}(t) = u(t-T)$
< 0	0	0	0
> 0	1	0	0
$> T$	1	0	1
$> 1 + T$	-1	1	1
$> 1 + 2T$	-1	$1 + T$	-1
$> 1 + 3T$	1	1	-1
$> 1 + 4T$	1	$1 - T$	1
$> 1 + 5T$	-1	1	1

Maximal överslång är T.

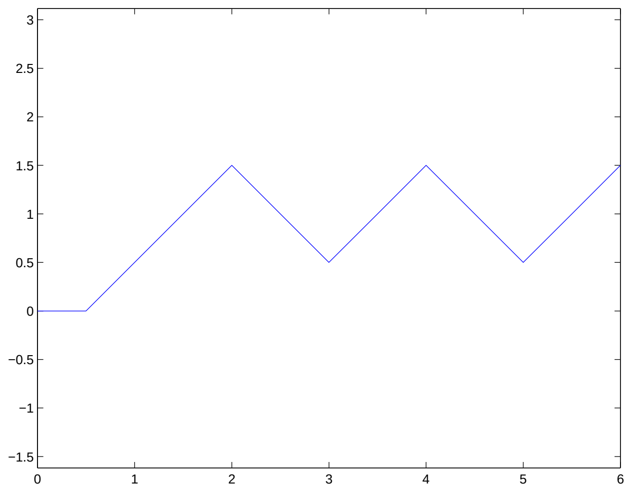

Figure 4: Till-från regulatorn med tidsfördröjning $T = 0.5$.

Uppgift 5c

I det här fallet är

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } y(t) < 1 \\ -1 & \text{om } y(t) > 1 \end{cases}$$

Med initialvillkor $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ blir lösningen $y(t) = \frac{1}{2}t^2$ fram till $t = \sqrt{2}$, där $y = 1$, $\dot{y} = \sqrt{2}$ $\ddot{y} = -1$. Där blir den nya lösningen $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2\sqrt{2}t - 2$, som är giltig tills dess att $y(t) = 1$ igen då $t = 3\sqrt{2}$, $\dot{y} = -\sqrt{2}$ och $\ddot{y} = 1$. Detta beteende kommer sedan upprepas, så att kurvan har formen $\pm\frac{1}{2}t^2$, med brytpunkter där $t = \sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \ldots$. Maximal översläng kan räknas ut genom att maximera $y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2\sqrt{2}t - 2$. Derivatan är noll för $t = 2\sqrt{2}$ med maxvärde 2. Det medför att maximal översläng är 1

Uppgift 5d

De återkopplade systemen i 5c och 5d är inte asymptotiskt stabila, utan kommer fortsätta att oscillera. Systemet i 5a) är däremot tillfredsställande och för små T blir amplituden (överslängen) i 5b) liten.

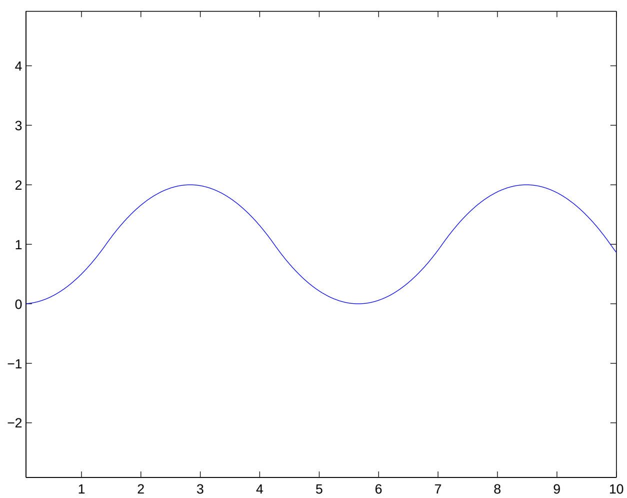

Figure 5: Till-från regulatorn med dubbelintegrator.