



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys
Tentamen
Torsdagen den 16 augusti 2012**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 1 eller period 3 innevarande läsår. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum av resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

- (1) Låt $f(x, y) = e^{5-x^2-y^2}$. Endast svar krävs på nedanstående uppgifter och för poäng krävs rätt svar.
- A. Beräkna de partiella derivatorna $\partial f / \partial x$ och $\partial f / \partial y$. (1)
 - B. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring punkten $(1, 2)$. (1)
 - C. Ange med hjälp av svaret på uppgift B ett närmevärde till $f(1.05, 2.01)$. (1)
 - D. Ange en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 2, 1)$ till ytan $z = f(x, y)$. (1)
- (2) Låt $D = \{(x, y) : y \geq |x| \text{ och } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beräkna integralen

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy. \quad (4)$$

- (3) Vilket är det största värde som kan antas av produkten av två reella tal x och y som är sådana att punkten (x, y) ligger på ett avstånd av högst en längdenhet från origo i xy -planet? (4)

DEL B

- (4) Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (3x + y) dy$ där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$. (4)
- (5) Bestäm de punkter där ytan med ekvation $3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$ har tangentplan som är parallella med yz -planet. Bestäm också ekvationerna för tangentplanen till ytan i dessa punkter. (4)
- (6) En strålkälla i origo ger upphov till fältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Bestäm flödet ut genom en sfär med medelpunkt i origo och radie R . (4)

DEL C

(7) Låt $f(x, y) = (1 + \sin(x + y)) \ln(1 + 2x + y) - 2x - y$.

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad två kring origo till f . (2)

B. Använd Taylorpolynomet i uppgift A för att avgöra om origo är lokal maxpunkt till f eller inte. (2)

(8) Ett homogent halvklot K med radie R och densitet ϱ placeras på ett horisontellt bord vilande på den sfäriska (runda) delen av ytan så att halvklotets symmetriaxel är vertikal. Då ges halvklotets potentiella energi av

$$W = \iiint_K g z \, dm$$

där $dm = \varrho \, dx \, dy \, dz$ är masselementet, g är tyngdaccelerationen och (x, y, z) är koordinater i ett ON-system med origo i bordsskivan och z -axeln pekande vertikalt uppåt. Beräkna W . (4)

(9) Beräkna arean av den del av konen $x^2 + y^2 = z^2$ som ligger i området $0 \leq y \leq 1/x^2$, $x \geq 3$, $z \geq 0$. (4)