KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-08-16

DEL A

(1) Låt $f(x, y) = e^{5-x^2-y^2}$. Endast svar krävs på nedanstående uppgifter och för poäng krävs rätt svar.

A. Beräkna de partiella derivatorna $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$. **(1)**

B. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring punkten $(1, 2)$. **(1)**

C. Ange med hjälp av svaret på uppgift B ett närmevärde till $f(1.05, 2.01)$. **(1)**

D. Ange en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 2, 1)$ till ytan $z = f(x, y)$. **(1)**

Lösning. A. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{5-x^2-y^2}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{5-x^2-y^2}$

B. Taylorpolynomet är $p(x, y) = 1 - 2(x - 1) - 4(y - 2)$

C. $0,86$

D. $2x + 4y + z = 11$ $\square$

(2) Låt $D = \{(x, y) : \ y \geq |x| \text{ och } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beräkna integralen

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

(4)

Lösning. Vi byter till polära koordinater, $x = r\cos\varphi$ och $y = r\sin\varphi$, där r går från 1 till 2 och φ från $\pi/4$ till $3\pi/4$, och får

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_1^2 r e^{r^2}\, dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4}(e^4 - e).$$

□

Svar: $\frac{\pi}{4}(e^4 - e)$

(3) Vilket är det största värde som kan antas av produkten av två reella tal x och y som är sådana att punkten (x, y) ligger på ett avstånd av högst en längdenhet från origo i xy-planet? **(4)**

Lösning. Vi observerar först att produkten måste maximeras i en punkt vars avstånd till origo är 1. Problemet kan då formuleras: Maximera $f(x, y) = xy$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Eftersom f är kontinuerlig och kurvan $g(x, y) = 0$ kompakt vet vi att ett största värde antas. Enligt Lagranges sats måste det antas i en punkt där ∇f och ∇g är parallella. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

där de första två ekvationerna ger oss att $y = \pm x$ vilket insatt i sista ekvationen ger fyra möjliga punkter: $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$. Vi jämför funktionsvärdena i dessa punkter och ser att största värdet är $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$. $\square$

Svar: $1/2$

DEL B

(4) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (2xy - x^2)\,dx + (3x+y)\,dy$ där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$. **(4)**

Lösning. Låt D vara det område som innesluts av γ. Förutsättningarna i Greens formel är då uppfyllda och vi får:

$$\begin{aligned}\int_\gamma (2xy - x^2)\,dx + (3x+y)\,dy &= \iint_D (3-2x)\,dxdy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (3-2x)\,dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (3\sqrt{y} - y - 3y^2 + y^4)\,dy \\ &= \frac{7}{10}.\end{aligned}$$

□

Svar: $7/10$

(5) Bestäm de punkter där ytan med ekvation $3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$ har tangentplan som är parallella med yz-planet. Bestäm också ekvationerna för tangentplanen till ytan i dessa punkter. **(4)**

Lösning. Låt $g(x, y, z) = 3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2$. I varje given punkt på ytan $g(x, y, z) = 8$ är då ∇g ortogonal mot ytan och kan användas som normal till tangentplanet. Vi har

$$\nabla g = (6x - 2y - 2z, -2x + 4y, -2x + 4z).$$

Villkoret att tangentplanet ska vara parallellt med yz-planet innebär att $-2x + 4y = -2x + 4z = 0$ vilket ger att $x = 2y = 2z$. Insättning av detta i ytans ekvation ger att $x^2 = 4$ eller $x = \pm 2$. Vi får alltså två punkter där tangentplanet är parallellt med yz-planet, nämligen $(2, 1, 1)$ och $(-2, -1, -1)$. I $(2, 1, 1)$ har tangentplanet ekvation $x = 2$ och i $(-2, -1, -1)$ har tangentplanet ekvation $x = -2$. $\square$

Svar: I $(2, 1, 1)$ har tangentplanet ekvation $x = 2$ och i $(-2, -1, -1)$ har tangentplanet ekvation $x = -2$.

(6) En strålkälla i origo ger upphov till fältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Bestäm flödet ut genom en sfär med medelpunkt i origo och radie R. **(4)**

Lösning. Kalla sfären för Σ. Enhetsnormalvektorn $\mathbf{N}$ till Σ i punkten (x, y, z) är $(x, y, z)/R$. I samma punkt är fälet $\mathbf{F} = (x, y, z)/R^3$. Vi får flödet Φ genom:

$$\Phi = \iint_\Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_\Sigma \frac{1}{R^2}\, dS = 4\pi.$$

$\square$

Svar: 4π

DEL C

(7) Låt $f(x,y) = (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y) - 2x - y$.
A. Bestäm Taylorpolynomet av grad två kring origo till f. **(2)**
B. Använd Taylorpolynomet i uppgift A för att avgöra om origo är lokal maxpunkt till f eller inte. **(2)**

Lösning. A. Eftersom $\sin t = t + O(t^3)$ och $\ln(1+u) = u - u^2/2 + O(u^3)$, när t och u är nära origo, får vi med $t = x+y$ och $u = 2x+y$ att

$$
\begin{aligned}
&1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y) - 2x - y \\
&= 1 + (x+y+O((x+y)^3))(2x+y-\frac{(2x+y)^2}{2} + O((2x+y)^3)) - 2x - y \\
&= xy + \frac{y^2}{2} + \text{ högre ordningens termer.}
\end{aligned}
$$

Det sökta Taylorpolynomet är alltså $p(x,y) = xy + y^2/2$.

B. Vi ser på Taylorpolynomet till f att origo är en kritisk punkt. Men när vi kvadratkompletterar den kvadratiska formen får vi

$$
xy + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(2xy + y^2) = \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2)
$$

som är indefinit. Origo är alltså en sadelpunkt och inte en lokal maxpunkt.

□

Svar: A. $p(x,y) = xy + y^2/2$. B Nej.

(8) Ett homogent halvklot K med radie R och densitet ϱ placeras på ett horisontellt bord vilande på den sfäriska (runda) delen av ytan så att halvklotets symmetriaxel är vertikal. Då ges halvklotets potentiella energi av

$$W = \iiint_K gz\,dm$$

där $dm = \varrho\,dx\,dy\,dz$ är masselementet, g är tyngdaccelerationen och (x, y, z) är koordinater i ett ON-system med origo i bordsskivan och z-axeln pekande vertikalt uppåt. Beräkna W. **(4)**

Lösning. Om vi låter z-axeln sammanfalla med halvklotets symmetriaxel kan vi sedan införa rymdpolära koordinater med centrum i $(0, 0, R)$, så att $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ och $z = R + r\cos\vartheta$. Jakobianen för detta koordinatbyte är $r^2\sin\vartheta$ och halvklotet beskrivs då av $0 \leq r \leq R$, $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$. Vi får

$$\begin{aligned}
W = \iiint_K gz\,dm &= g\varrho \iiint_K z\,dx\,dy\,dz \\
&= g\varrho \int_0^R \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (R + r\cos\vartheta) r^2 \sin\vartheta\,d\varphi \right) d\vartheta \right) dr \\
&= 2\pi g\varrho \int_0^R \left(\int_{\pi/2}^{\pi} (Rr^2\sin\vartheta + r^3\cos\vartheta\sin\vartheta)\,d\vartheta \right) dr \quad . \\
&= 2\pi g\varrho \int_0^R (Rr^2 - r^3/2)\,dr \\
&= \frac{5\pi g\varrho R^4}{12}.
\end{aligned}$$

□

Svar: $W = \dfrac{5\pi g\varrho R^4}{12}.$

(9) Beräkna arean av den del av konen $x^2 + y^2 = z^2$ som ligger i området $0 \leq y \leq 1/x^2$, $x \geq 3$, $z \geq 0$. **(4)**

Lösning. Låt D vara det område i xy-planet som ges av $x \geq 3$ och $0 \leq y \leq 1/x^2$. Ytan är då en funktionsyta $z = f(x, y)$ till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, där (x, y) ligger i D, och dess area A ges av

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy \\
&= \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy \\
&= \sqrt{2} \int_3^\infty \left(\int_0^{1/x^2} dy \right) dx \\
&= \sqrt{2} \int_3^\infty \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \square
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{\sqrt{2}}{3}$
