



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2012-08-16

DEL A

- (1) Låt $f(x, y) = e^{5-x^2-y^2}$. Endast svar krävs på nedanstående uppgifter och för poäng krävs rätt svar.
- A. Beräkna de partiella derivatorna $\partial f / \partial x$ och $\partial f / \partial y$. (1)
 - B. Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till f kring punkten $(1, 2)$. (1)
 - C. Ange med hjälp av svaret på uppgift B ett närmevärde till $f(1.05, 2.01)$. (1)
 - D. Ange en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 2, 1)$ till ytan $z = f(x, y)$. (1)

Lösning. A. $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{5-x^2-y^2}$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{5-x^2-y^2}$

B. Taylorpolynomet är $p(x, y) = 1 - 2(x - 1) - 4(y - 2)$

C. 0,86

D. $2x + 4y + z = 11$

□

(2) Låt $D = \{(x, y) : y \geq |x| \text{ och } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Beräkna integralen

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy.$$

(4)

Lösning. Vi byter till polära koordinater, $x = r \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi$, där r går från 1 till 2 och φ från $\pi/4$ till $3\pi/4$, och får

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_1^2 r e^{r^2} dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{4}(e^4 - e).$$

□

Svar: $\frac{\pi}{4}(e^4 - e)$

- (3) Vilket är det största värde som kan antas av produkten av två reella tal x och y som är sådana att punkten (x, y) ligger på ett avstånd av högst en längdenhet från origo i xy -planet? (4)

Lösning. Vi observerar först att produkten måste maximeras i en punkt vars avstånd till origo är 1. Problemet kan då formuleras: Maximera $f(x, y) = xy$ under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Eftersom f är kontinuerlig och kurvan $g(x, y) = 0$ kompakt vet vi att ett största värde antas. Enligt Lagranges sats måste det antas i en punkt där ∇f och ∇g är parallella. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

där de första två ekvationerna ger oss att $y = \pm x$ vilket insatt i sista ekvationen ger fyra möjliga punkter: $(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$. Vi jämför funktionsvärdena i dessa punkter och ser att största värdet är $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$. □

Svar: $1/2$

DEL B

- (4) Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (3x + y) dy$ där γ är den positivt orienterade randen till det begränsade område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$. (4)

Lösning. Låt D vara det område som innesluts av γ . Förutsättningarna i Greens formel är då uppfyllda och vi får:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (2xy - x^2) dx + (3x + y) dy &= \iint_D (3 - 2x) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (3 - 2x) dx \right) dy \\ &= \int_0^1 (3\sqrt{y} - y - 3y^2 + y^4) dy \\ &= \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

□

Svar: 7/10

- (5) Bestäm de punkter där ytan med ekvation $3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$ har tangentplan som är parallella med yz -planet. Bestäm också ekvationerna för tangentplanen till ytan i dessa punkter. (4)

Lösning. Låt $g(x, y, z) = 3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2$. I varje given punkt på ytan $g(x, y, z) = 8$ är då ∇g ortogonal mot ytan och kan användas som normal till tangentplanet. Vi har

$$\nabla g = (6x - 2y - 2z, -2x + 4y, -2x + 4z).$$

Villkoret att tangentplanet ska vara parallellt med yz -planet innebär att $-2x + 4y = -2x + 4z = 0$ vilket ger att $x = 2y = 2z$. Insättning av detta i ytans ekvation ger att $x^2 = 4$ eller $x = \pm 2$. Vi får alltså två punkter där tangentplanet är parallellt med yz -planet, nämligen $(2, 1, 1)$ och $(-2, -1, -1)$. I $(2, 1, 1)$ har tangentplanet ekvation $x = 2$ och i $(-2, -1, -1)$ har tangentplanet ekvation $x = -2$. $\square$

Svar: I $(2, 1, 1)$ har tangentplanet ekvation $x = 2$ och i $(-2, -1, -1)$ har tangentplanet ekvation $x = -2$.

(6) En strålkälla i origo ger upphov till fältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Bestäm flödet ut genom en sfär med medelpunkt i origo och radie R . (4)

Lösning. Kalla sfären för Σ . Enhetsnormalvektorn $\mathbf{N}$ till Σ i punkten (x, y, z) är $(x, y, z)/R$. I samma punkt är fältet $\mathbf{F} = (x, y, z)/R^3$. Vi får flödet Φ genom:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R^2} \, dS = 4\pi.$$

□

Svar: 4π

DEL C

(7) Låt $f(x, y) = (1 + \sin(x + y)) \ln(1 + 2x + y) - 2x - y$.

A. Bestäm Taylorpolynomet av grad två kring origo till f . (2)

B. Använd Taylorpolynomet i uppgift A för att avgöra om origo är lokal maxpunkt till f eller inte. (2)

Lösning. A. Eftersom $\sin t = t + O(t^3)$ och $\ln(1 + u) = u - u^2/2 + O(u^3)$, när t och u är nära origo, får vi med $t = x + y$ och $u = 2x + y$ att

$$\begin{aligned} & 1 + \sin(x + y)) \ln(1 + 2x + y) - 2x - y \\ &= (1 + (x + y + O((x + y)^3))) (2x + y - \frac{(2x + y)^2}{2} + O((2x + y)^3)) - 2x - y \\ &= xy + \frac{y^2}{2} + \text{högre ordningens termer.} \end{aligned}$$

Det sökta Taylorpolynomet är alltså $p(x, y) = xy + y^2/2$.

B. Vi ser på Taylorpolynomet till f att origo är en kritisk punkt. Men när vi kvadratkompletterar den kvadratiska formen får vi

$$xy + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}[(x + y)^2 - x^2]$$

som är indefinit. Origo är alltså en sadelpunkt och inte en lokal maxpunkt.

□

Svar: A. $p(x, y) = xy + y^2/2$. B Nej.

- (8) Ett homogent halvklot K med radie R och densitet ϱ placeras på ett horisontellt bord vilande på den sfäriska (runda) delen av ytan så att halvklotets symmetriaxel är vertikal. Då ges halvklotets potentiella energi av

$$W = \iiint_K g z \, dm$$

där $dm = \varrho \, dx \, dy \, dz$ är masselementet, g är tyngdaccelerationen och (x, y, z) är koordinater i ett ON-system med origo i bordsskivan och z -axeln pekande vertikalt uppåt. Beräkna W . (4)

Lösning. Om vi låter z -axeln sammanfalla med halvklotets symmetriaxel kan vi sedan införa rymdpolära koordinater med centrum i $(0, 0, R)$, så att $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ och $z = R + r \cos \vartheta$. Jakobianen för detta koordinatbyte är $r^2 \sin \vartheta$ och halvklotet beskrivs då av $0 \leq r \leq R$, $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$. Vi får

$$\begin{aligned} W &= \iiint_K g z \, dm = g \varrho \iiint_K z \, dx \, dy \, dz \\ &= g \varrho \int_0^R \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (R + r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta \right) dr \\ &= 2\pi g \varrho \int_0^R \left(\int_{\pi/2}^{\pi} (R r^2 \sin \vartheta + r^3 \cos \vartheta \sin \vartheta) d\vartheta \right) dr \\ &= 2\pi g \varrho \int_0^R (R r^2 - r^3/2) dr \\ &= \frac{5\pi g \varrho R^4}{12}. \end{aligned}$$

□

Svar: $W = \frac{5\pi g \varrho R^4}{12}.$

- (9) Beräkna arean av den del av konen $x^2 + y^2 = z^2$ som ligger i området $0 \leq y \leq 1/x^2$, $x \geq 3$, $z \geq 0$. **(4)**

Lösning. Låt D vara det område i xy -planet som ges av $x \geq 3$ och $0 \leq y \leq 1/x^2$. Ytan är då en funktionsyta $z = f(x, y)$ till funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, där (x, y) ligger i D , och dess area A ges av

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx \, dy \\ &= \iint_D \sqrt{2} \, dx \, dy \\ &= \sqrt{2} \int_3^\infty \left(\int_0^{1/x^2} dy \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int_3^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \square \end{aligned}$$

Svar: $\frac{\sqrt{2}}{3}$
