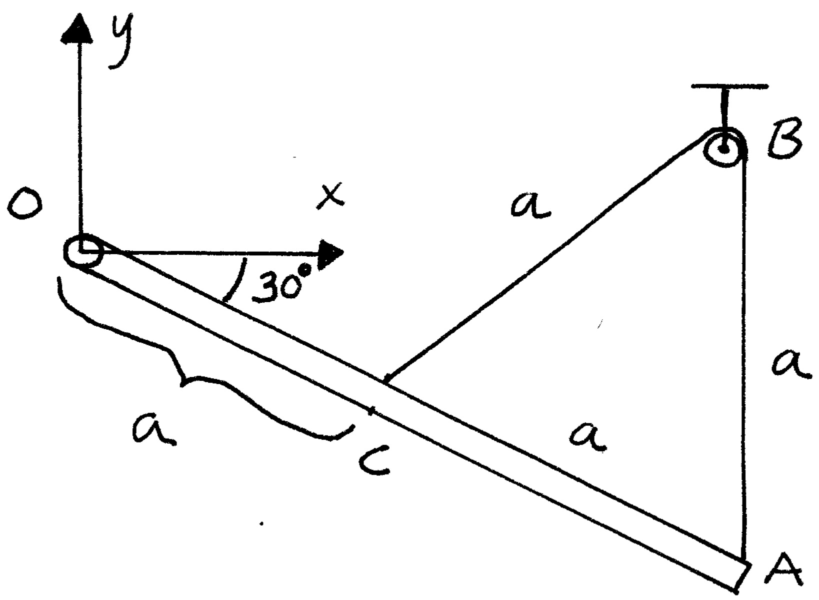
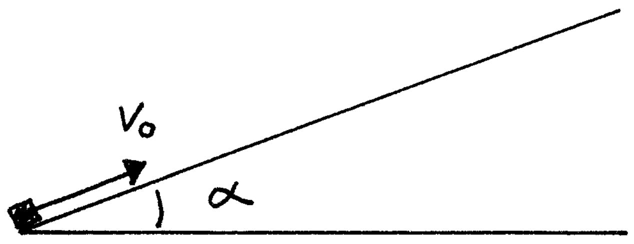
Tentamen, SG1109, SG1130, SG1131, 20/8, 2012

Tillåtna hjälpmedel: Penna och övriga ritdon. Inget annat.

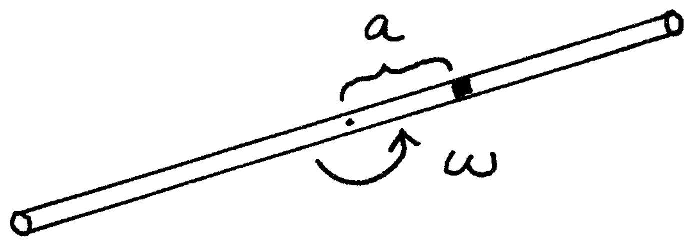
1. En rak homogen balk med massan m och längden $2a$ kan rotera i ett vertikalplan kring en horisontell glatt axel genom O och hålls i jämvikt med hjälp av en vajer som är fäst i punkterna A och C och löper utan friktion över en trissa i punkten B. Trissans radie är försumbar, avstånden AB och CB är båda a, fästpunkten C ligger på mitten av balken och balkens vinkel till horisontalplanet är 30^o, allt enligt figuren. Bestäm spännkraften, S, i vajern och reaktionskraften, $\mathbf{R}_O = (R_x, R_y)$, från axeln på balken i O !



2. En partikel med massan m glider uppför ett lutande plan med lutningsvinkeln α och vänder sedan och glider tillbaka. Partikeln hastighet i utgångsläget är v_0 och friktionstalen är μ . Bestäm partikelns hastighet då den har kommit tillbaka till utgångsläget!



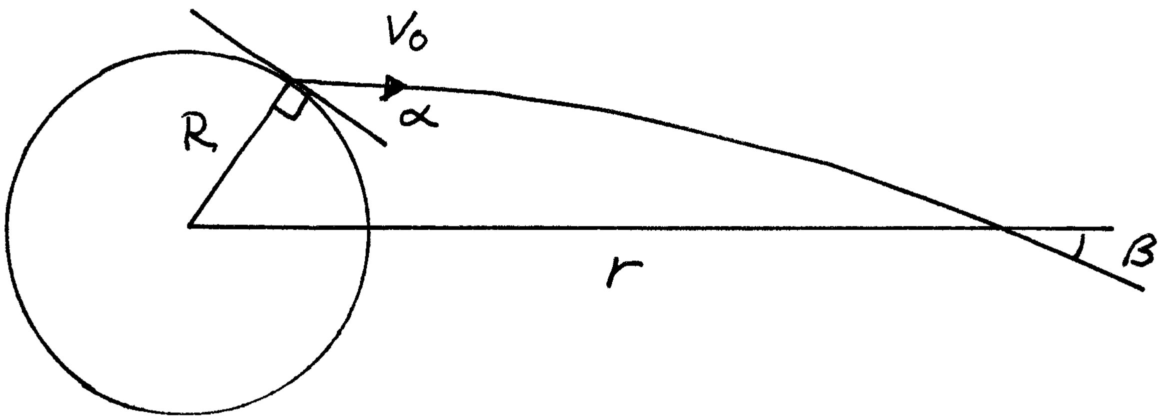
3. En partikel med massan m befinner sig inne i ett långt smalt rör som roterar med konstant vinkelhastighet ω i horisontalplanet. (Detta innebär att du ser röret uppifrån i figuren och inte från sidan.) Vid tiden $t = 0$ befinner sig partikeln på det radiella avståndet a från rotationsaxeln och dess radiella hastighet är noll. Därefter börjar den glida utan friktion. Bestäm partikelns radiella avstånd från rotationsaxeln och den horisontella normalkraften på partikeln från röret som funktioner av tiden!



4. Ett föremål skjuts upp från jordytan med en utgångshastighet $v_0 = \sqrt{2gR}$, som kallas den andra kosmiska hastigheten. Utgångshastighetens vinkel till horisontalplanet är α.

a) Bestäm vinkeln β (se figur) då föremålet befinner sig på avståndet r från jordens centrum! (2p)

b) Finns det något värde på utgångsvinkeln α för vilket föremålet kommer att komma tillbaka till jorden? Motivera med hjälp av resultatet du fick i a-uppgiften! (1p)



Teoridel

1. a) Visa att ett kraftmoment inte förändras om kraften parallellförflyttas utefter sin verkningslinje! En figur måste ingå! (1p)
   b) Visa att varje kraftsystem kan reduceras till en kraftsumma och ett kraftmoment med avseende på en godtyckligt vald punkt! (Reduktionsresultatet) (2p)

2. a) Härled uttrycken för hastigheten och accelerationen i cylinderkoordinater. Härledningen ska innehålla relevanta figurer och en härledning av uttrycken för $\dot{\mathbf{e}}_r$ och $\dot{\mathbf{e}}_\theta$! (2p)
   b) Beräkna $\mathbf{e}_z \cdot (\dot{\mathbf{e}}_r \times \dot{\mathbf{e}}_\theta)$! (1p)

3. En vagn med massan m rör sig på ett horisontellt underlag under inverkan av en fjäderkraft, för vilken fjäderkonstanten är k, och en bromsande kraft som är proportionell mot vagnens hastighet, med proportionalitetskonstanten c.

   a) Rita en figur av vagnen, sätt ut de krafter som den påverkas av och ställ upp svängningsekvationen för vagnens läge $x(t)$! (1p)
   b) Definiera dämpningsfaktorn ζ och den naturliga vinkelfrekvensen ω_n och ge lösningen till svängningsekvationen för kritisk dämpning ($\zeta = 1$) ! (1p)
   c) Hur många extremvärden (max- eller min-värden) kan $x(t)$ högst ha för kritisk dämpning i intervallet $0 < t < \infty$? Motivera med hjälp av lösningen du skrev upp i b-uppgiften! (1p)

4. a) Härled uttrycket för den potentiella energin för Newtons allmänna gravitationskraft! (1p)
   b) En kropp med massan m rör sig i gravitationsfältet från en centralkropp med massan $M \gg m$. Rita en figur av kropparna, sätt ut kraften som den lättare kroppen påverkas av och ställ upp rörelseekvationen (Newtons andra lag) för denna kropp! Visa sedan hur ekvationen kan lösas genom att införa transformationen $u = 1/r$ och utnyttja att $h = r^2\dot{\theta}$ är en rörelsekonstant! Skriv upp den allmänna lösningen och namnge de tre typer av kurvor som partikeln med massan m kan färdas utefter. (2p)