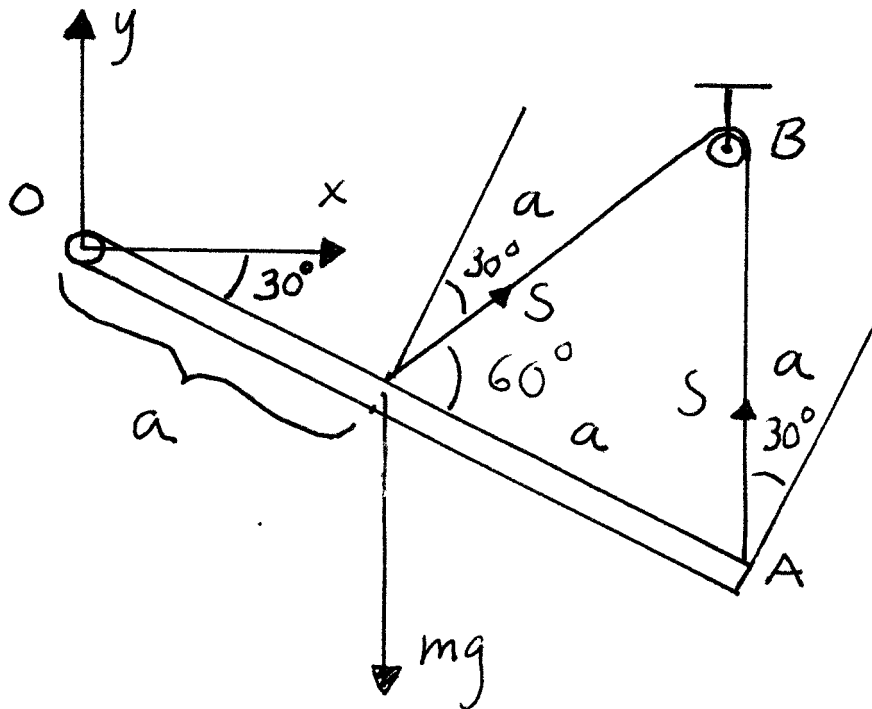


Lösningar, SG1109, SG1130, 29/5, 2012



1. Momentjämvikt kring O ger

$$aS \cos 30^\circ + 2aS \cos 30^\circ - amg \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow 3S = mg \Rightarrow S = \frac{mg}{3}. \quad (1)$$

Kraftjämvikt i x- och y-led ger

$$R_x + S \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow R_x = -S \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}mg}{6}, \quad (2)$$

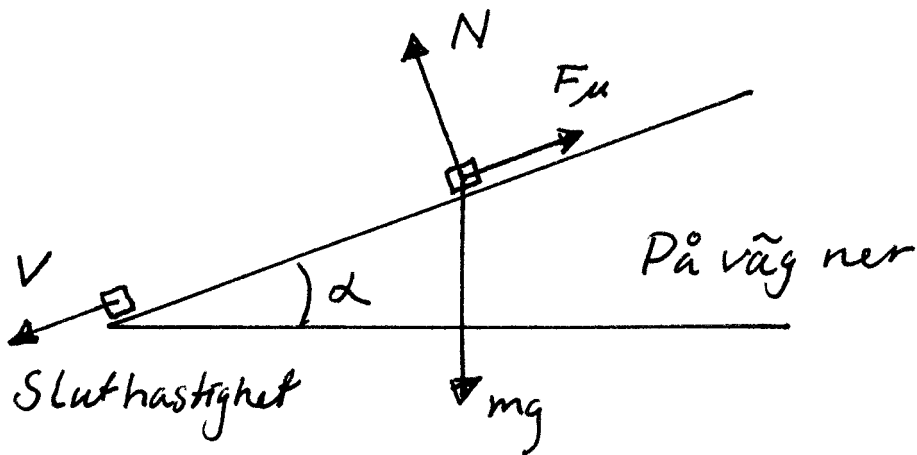
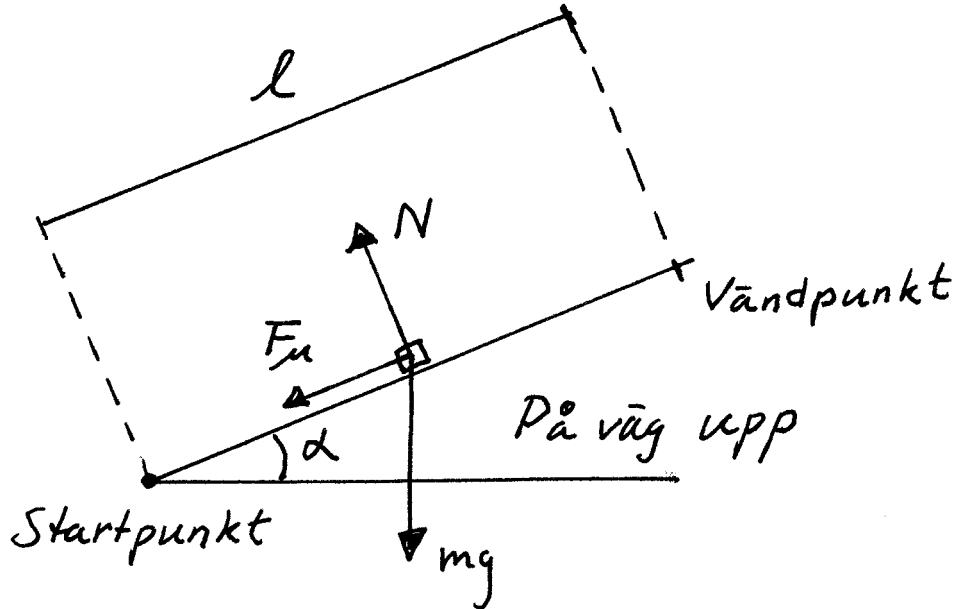
$$R_y + S \cos 30^\circ + S - mg = 0 \Rightarrow R_y = mg - \frac{1}{2}S - S = \frac{mg}{2}. \quad (3)$$

Svar:

$$S = \frac{mg}{3}, \quad \mathbf{R} = \frac{mg}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right). \quad (4)$$

2. Kraftjämvikt i normalled ger

$$N - mg \cos \alpha = 0 \Rightarrow N = mg \cos \alpha. \quad (5)$$



Både på uppvägen och nervägen ges friktionskraften av

$$F_\mu = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (6)$$

På uppvägen är den riktad snett nedåt längs planet och på nervägen är den riktad snett uppåt längs planet (se figurer).

Lagen om den kinetiska energin ger

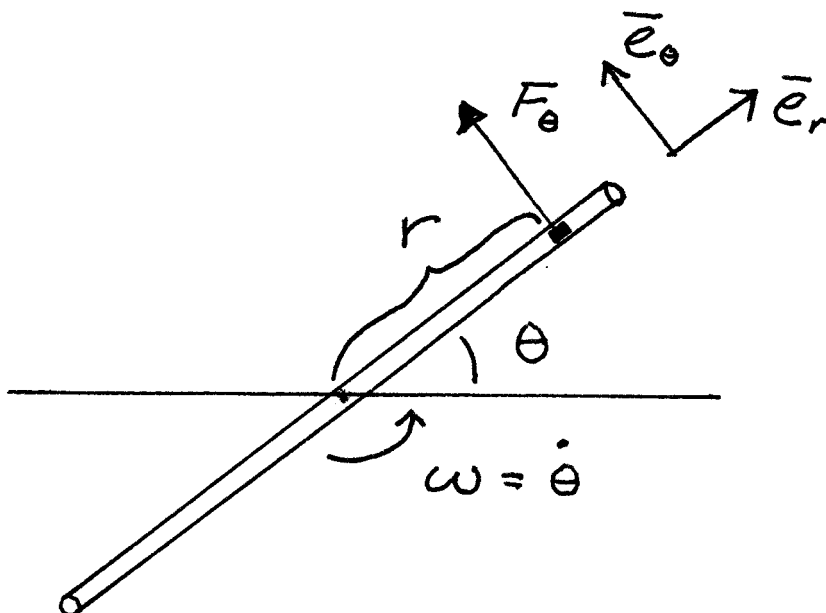
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -l(mg \sin \alpha + F_\mu) \Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 = lg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = l(mg \sin \alpha - F_\mu) \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = lg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad (8)$$

för uppvägen respektive nervägen, där v är den sökta hastigheten och l den sträcka som partikeln tillryggalägger varje väg. Om vi dividerar (8) med (7) får vi

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \Rightarrow v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (9)$$

3.



Newtons andra lag ger

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0, \quad (10)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (11)$$

Eftersom $\dot{\theta} = \omega$ och $\ddot{\theta} = 0$ får vi alltså

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0, \quad (12)$$

$$2m\dot{r}\omega = F_\theta. \quad (13)$$

Lösningen till (12) är

$$r = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t) \quad (14)$$

och för derivatan fås alltså

$$\dot{r} = \omega A \exp(\omega t) - \omega B \exp(-\omega t) \quad (15)$$

Begynnelsevillkoren är

$$r = a \text{ och } \dot{r} = 0 \text{ då } t = 0, \quad (16)$$

vilket ger

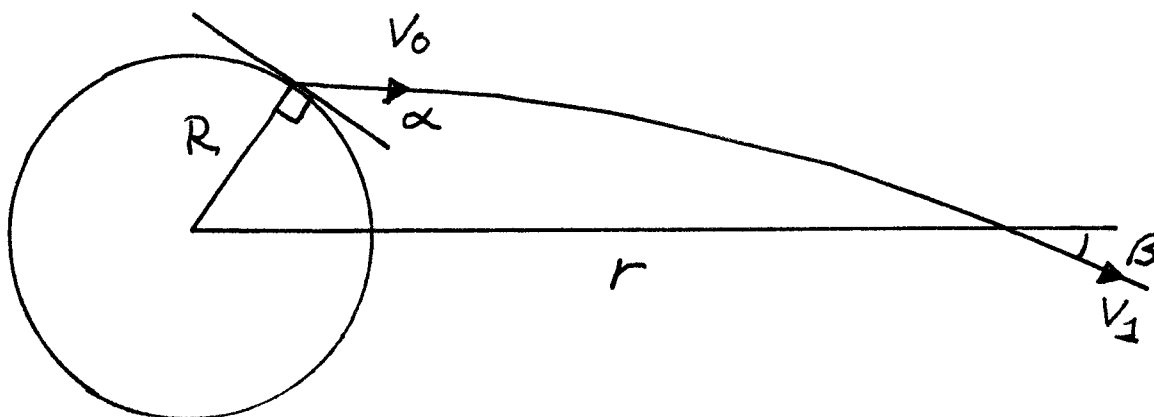
$$a = A + B, \quad 0 = \omega(A - B) \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}a, \quad (17)$$

och slutligen

$$r = \frac{1}{2}a[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)], \quad (18)$$

$$F_\theta = m a \omega^2 [\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)]. \quad (19)$$

4.



a) Rörelsemängdsmomentets och energins bevarande ger

$$R m v_0 \cos \alpha = r m v_1 \sin \beta, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - m \frac{g R^2}{R} = \frac{1}{2} m v_1^2 - m \frac{g R^2}{r}. \quad (21)$$

Med $v_0 = \sqrt{2gR}$ fås

$$R \sqrt{2gR} \cos \alpha = r v_1 \sin \beta, \quad (22)$$

$$0 = \frac{1}{2} v_1^2 - \frac{g R^2}{r}. \quad (23)$$

Ekvation (23) ger

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g}{r}}R, \quad (24)$$

insatt i (22) ger

$$R\sqrt{2gR}\cos\alpha = r\sqrt{\frac{2g}{r}}R\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{R}{r}}\cos\alpha, \quad (25)$$

och

$$\beta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{r}}\cos\alpha\right). \quad (26)$$

b) För att föremålet ska komma tillbaka till jorden så måste det vända. I ett vändläge gäller att $\beta = \pi/2$. För att det ska komma tillbaka så måste alltså $\sin\beta = 1$ för något $r > R$, men enligt (25) så har vi att $\sin\beta < 1$ för alla $r > R$, eftersom $\sqrt{R/r} < 1$ och $\cos\alpha \leq 1$. Alltså kommer föremålet aldrig tillbaka, oavsett vad utgångsvinkeln α är.