Algebraiska uttryck:

Räknelagar:

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba \qquad \textit{kommutativa lagar}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad (ab)c=a(bc) \qquad \textit{associativa lagar}$$

$$a(b+c)=ab+ac \qquad \textit{distributiva lagen}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a+(+b)=a+b \\ a-(-b)=a+b \\ a-(+b)=a-b \\ a+(-b)=a-b \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} (+a)(+b)=ab \\ (-a)(-b)=ab \\ (-a)(+b)=-ab \\ (+a)(-b)=-ab \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \frac{+a}{+b}=\frac{a}{b} & \frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b} \\ \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b} & \frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b} \end{array}}$$

Potenser:

$a^1=a$

$a^2=a\cdot a$

$a^3=a\cdot a\cdot a$

…

$a^n=a\cdot a\cdots a$ **(** n gånger **)**

$$(-a)^n=\begin{cases} a^n, & \text{n jämnt tal} \\ -a^n, & \text{n udda tal} \end{cases}$$

$$(a-b)=-(b-a) \qquad (a-b)^3=-(b-a)^3$$

$$(a-b)^2=(b-a)^2 \qquad (a-b)^4=(b-a)^4 \qquad \ldots\ldots$$

Potenser med heltalsexponenter:

Om x och y är hela tal då gäller följande potenslagar:

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

$(a^x)^y=a^{xy}$ $\qquad (ab)^x=a^x b^x$

$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}, \quad a\neq 0$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \quad b\neq 0$

$a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \quad a\neq 0$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-x}=\left(\frac{b}{a}\right)^x, \quad a,b\neq 0$

$a^0=1 \quad , \quad a\neq 0$

(Aritmetiska) Rötter: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow a=b^n$ **(** $a\geq 0, \quad b\geq 0, \quad n=1,2,3\ldots$ **)**

För udda exponenter definieras även roten ur ett negativt tal:

$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ **(** $a\geq 0, \quad n=1,3,5\,7,\ldots$ **)**

Potenser med rationella exponenter:

A.H.

Om $a > 0$, p och q hela tal, $q \neq 0$ då definieras $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Potenser med reella exponenter: Ovanstående potenslagarna gäller även för reella exponenter för positiva baser.

Uttrycket a^x är definierad för alla reella x om basen $a > 0$.

Exempel: a) $16^{1/2} = \sqrt{16} = 4$ **b)** $16^{-0.75} = 16^{-3/4} = \sqrt[4]{16^{-3}} = (\sqrt[4]{16})^{-3} = 2^{-3} = 1/8$

Rationella uttryck (bråk)

Uttrycket $\frac{a}{b}$ *är definierat om och endast om* $b \neq 0$.

Anmärkning: I nedanstående exempel och frågor antar vi att rationella uttryck är korrekt definierade dvs att nämnarna $\neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Kvadreringsreglerna:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Konjugatregeln:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exempel 1. Förenkla följande uttryck

a) $\frac{(a^3)^{10} \cdot (a^5)^2}{(a^2)^2}$ b) $\frac{(a^3b^2)^{10} \cdot (ab^3)^2}{(a^2b^3)^2}$ c) $\frac{(-ab^2)^3 \cdot (-ab^3)^{10}}{a^{10}b^4}$

Lösning.

a) $\frac{(a^3)^{10} \cdot (a^5)^2}{(a^2)^2} = \frac{a^{30} \cdot a^{10}}{a^4} = \frac{a^{40}}{a^4} = a^{36}$

b) $\frac{(a^3b^2)^{10} \cdot (ab^3)^2}{(a^2b^3)^2} = \frac{a^{30}b^{20} \cdot a^2b^6}{a^4b^6} = \frac{a^{32}b^{26}}{a^4b^6} = a^{28}b^{20}$

c) $\frac{(-ab^2)^3 \cdot (-ab^3)^{10}}{a^{10}b^4} = \frac{-a^3b^6 \cdot a^{10}b^{30}}{a^{10}b^4} = \frac{-a^{13}b^{36}}{a^{10}b^4} = -a^3b^{32}$

Exempel 2. Faktorisera följande uttryck

a) $a^4x + a^5y + a^7z$ b) $ax^2 - ay^2$ c) $ax - ay + by - bx$

Lösning.

a) $a^4x + a^5y + a^7z = a^4(x + ay + a^3z)$

b) $ax^2 - ay^2 = a(x^2 - y^2) = a(x - y)(x + y)$

c) $ax - ay + by - bx = a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b)$

Exempel 3. Beräkna och förenkla

a) $\dfrac{a^2b - b^3}{ab - b^2} \cdot \dfrac{a^2 - ab}{a^2 + ab}$ **b)** $\dfrac{\frac{ab^3}{c^3}}{\frac{(abc^2)^3}{c^3}}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{3}{x} - \frac{3}{y}}$

Lösning.

a)

$$\frac{a^2b - b^3}{ab - b^2} \cdot \frac{a^2 - ab}{a^2 + ab} = \frac{b(a^2 - b^2)}{b(a - b)} \cdot \frac{a(a - b)}{a(a + b)} = \frac{b(a - b)(a + b)}{b(a - b)} \cdot \frac{a(a - b)}{a(a + b)} = a - b$$

b)

$$\frac{\frac{ab^3}{c^3}}{\frac{(abc^2)^3}{c^3}} = \frac{\frac{ab^3}{c^3}}{\frac{a^3b^3c^6}{c^3}} = \frac{ab^3}{c^3} \cdot \frac{c^3}{a^3b^3c^6} = \frac{1}{a^2c^6}$$

c) $$\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{3}{x} - \frac{3}{y}} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{3y - 3x}{xy}} = \frac{y^2 - x^2}{x^2y^2} \cdot \frac{xy}{3y - 3x} = \frac{(y - x)(y + x)}{x^2y^2} \cdot \frac{xy}{3(y - x)} = \frac{x + y}{3xy}$$

ÖVNINGSUPPGIFTER

Beräkna och förenkla

1. **a)** $(-a^3)^2$ **b)** $(-a^2)^3$
c) $(-2a^2)^3(-5a^5)^2$ **d)** $a^{x-3}\cdot a^{3-x}$

2 . **a)** $a^2(a^3+a)-a^3(a^2-a)$ **b)** $(-3a^x)^2+(a^2)^x$
c) $a^x(a^y+a^z)-a^y(a^x-a^{-y})$ **d)** $(a^{x-3})^2\cdot a^{3-x}$

3 . **a)** $(a^3+b+c)^0+5d^0$ **b)** $\dfrac{a^0+x^0}{2z^0+w^0}$
c) $(a^{-3})^{-3}\cdot(a^3)^3$ **d)** $\dfrac{(a^{-3})^2}{(2a^{-7})^{-1}}$

4. **a)** $\dfrac{(a^3)^2\cdot(a^5)^2}{(a^2)^2}$ **b)** $\dfrac{(a^3b^2c)^{10}\cdot(ab^3)^2}{(a^5b^3c^2)^2}$
c) $\dfrac{(-a^2)^3\cdot(-ab^3)^{10}}{a^{10}b^4}$ **d)** $\dfrac{(-a^2)^3\cdot(-ab^3)^9}{a^{10}b^4}$

5. **a)** $\dfrac{5a-5b}{b-a}$ **b)** $\dfrac{a-b}{bx-ax}$
c) $\dfrac{a^2-b^2}{4b-4a}$ **d)** $\dfrac{(a-b)^2}{b-a}$
e) $\dfrac{(a-b)^3}{b-a}$ **f)** $\dfrac{(a-b)^4}{b-a}$

6. **a)** $\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}\cdot\dfrac{xy}{5y-5x}$ **b)** $\dfrac{a^2b-b^3}{a-b}\cdot\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}$

7. **a)** $\dfrac{1-\frac{1}{y}}{2-\frac{1}{y}}$ **b)** $\dfrac{1-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}$ **c)** $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{1+\frac{a}{b}}$ **d)** $\dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{ax-bx}$

SVAR:

1. **a)** a^6 **b)** $-a^6$ **c)** $-200a^{16}$ **d)** 1
2. **a)** a^3+a^4 **b)** $10a^{2x}$ **c)** $a^{x+z}+1$ **d)** a^{x-3}
3 . **a)** 6 **b)** $\dfrac{2}{3}$ **c)** a^{18} **d)** $2a^{-13}$
4. **a)** a^{12} **b)** $a^{22}b^{20}c^6$ **c)** $-a^6b^{26}$ **d)** a^5b^{23}
5. **a)** -5 **b)** $\dfrac{-1}{x}$ **c)** $\dfrac{-(a+b)}{4}$ **d)** $b-a$
e) $-(a-b)^2$ **[=** $-(b-a)^2$ **]** **f)** $(b-a)^3$ **[=** $-(a-b)^3$ **]**
6. **a)** $\dfrac{x+y}{5xy}$ **b)** $ab-b^2$

A.H.

7. **a)** $\dfrac{y-1}{2y-1}$ **b)** $\dfrac{b-a}{b+a}$ **c)** $\dfrac{b-a}{a}$ **d)** $\dfrac{-a-b}{abx}$

LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Två ekvationer med två obekanta variabler *x* och *y*.

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

SUBSTITUTIONSMETODEN

Vi löser ut en av de obekanta ur den ena ekvationen och sätter in i den andra.

Exempel 1. Lös följande ekvationssystem exakt $\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ 3x + y = 7 & (2) \end{cases}$

Lösning.
I andra ekvationen är det lätt att lösa ut *y*:

1. Ekvation (2) ger $y = 7 - 3x$.
2. I ekvation (1) ersätter (substituerar) vi därför *y* med $(7 - 3x)$

I ekvationen $2x - 3y = 1$ *ersätter vi y med* $(7 - 3x)$

$$2x - 3(7 - 3x) = 1 \Rightarrow$$
$$2x - 21 + 9x = 1 \Rightarrow$$
$$11x = 22 \qquad \text{Dividera båda leden med 11}$$
$$x = 2$$

3. $x = 2$ insättes i $y = 7 - 3x$, vilket ger $y = 1$

Kontroll:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 & (1) \\ 3 \cdot 2 + 1 = 7 & (2) \end{cases}$$

Svar: $x = 2$, $y = 1$

Exempel 2. Lös följande ekvationssystem med avseende på x och y

$$\begin{cases} x + 2y = 2a + 3 & (1) \\ 2x + 3y = 3a + 5 & (2) \end{cases}$$

Lösning.
I första ekvationen är det lätt att lösa ut *x*:

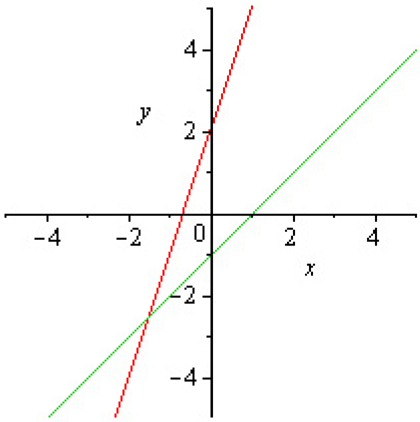
1. Ekvation (1) ger
$x = 2a + 3 - 2y$
2. I ekvation (2) ersätter vi därför *x* med $(2a + 3 - 2y)$

$$2(2a + 3 - 2y) + 3y = 3a + 5 \Rightarrow$$
$$4a + 6 - 4y + 3y = 3a + 5 \Rightarrow$$
$$-y = -a - 1 \qquad \text{Multiplicera båda leden med (-1)}$$
$$y = a + 1$$

3. $y = a + 1$ insättes i $x = 2a + 3 - 2y$, vilket ger $x = 2a + 3 - 2a - 2$ d v s
$x = 1$

Svar: $x = 1, \quad y = a + 1$

Exempel 3. Linjerna i figuren har ekvationen $y = 3x + 2$ och $y = x - 1$. Bestäm exakt koordinaterna för linjernas skärningspunkt.



Lösning.

Vi ska lösa ekvationssystemet $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$

I andra ekvationen ersätter vi y med $(3x + 2)$ vilket ger

$3x + 2 = x - 1 \Rightarrow$

$2x = -3 \Rightarrow$

$x = \dfrac{-3}{2}$.

Vi ersätter $x = \dfrac{-3}{2}$ i ekvationen $y = x - 1$ och får $y = \dfrac{-5}{2}$

Svar: $x = \dfrac{-3}{2}, \quad y = \dfrac{-5}{2}$

ÖVNINGAR: (Substitutionsmetoden)

(1-4) Lös följande ekvationssystem med avseende på x och y:

1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 2a + 1 \\ 2x + 3y = 4a + 3 \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x + y = a + 2b \\ x - 2y = 2b - 2a \end{cases}$

5. Bestäm exakt koordinaterna för skärningspunkten mellan de båda linjerna $y = 2x + 2$ och $y = x + 3$

Svar:

1. $x = 1, \quad y = 2$ **2.** $x = 2, \quad y = -1$ **3.** $x = 2a, \quad y = 1$ **4.** $x = 2b, \quad y = a$

5. $x = 1, \quad y = 4$

A.H.

LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Två ekvationer med två obekanta variabler *x* och *y*.

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

ADDITIONSMETODEN

- Först multiplicerar vi en eller båda ekvationerna med lämpliga tal så att koefficienterna för *x* (eller *y*) blir **motsatta tal**.

- Därefter adderar vi ekvationerna led för led och eliminerar en av variablerna.

Exempel 1. Lös följande ekvationssystem med additionsmetoden $\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (1) \\ 2x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$

Lösning. För att få bort *x*-termerna vid additionen, multiplicerar vi den första ekvationen med 2 och den andra med –3.

1. $\begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x - 12y = -24 \end{cases}$

2. Vi ledvis adderar ekvationerna och får

$-8y = -8$ (Dividera med –8)

$y = 1$

3. $y = 1$ insättes i ekvationen (1)

$3x + 2 \cdot 1 = 8$, vilket ger $x = 2$.

Svar: $x = 2$, $y = 1$

Alternativ lösning. För att få bort *y*-termerna vid additionen, multiplicerar vi den första ekvationen med -2 .

1. $\begin{cases} -6x - 4y = -16 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

2. Vi ledvis adderar ekvationerna och får

$-4x = -8$ (Dividera med –4)

$x = 2$

3. $x = 2$ insättes i ekvationen (1)

$3 \cdot 2 + 2y = 8$, vilket ger $y = 1$.

Svar: $x = 2$, $y = 1$

Exempel 2. Lös följande ekvationssystem med avseende på x och y $\begin{cases} 5x+2y=2a & (1) \\ 2x+3y=3a & (2) \end{cases}$

Lösning. För att få bort *x*-termerna vid additionen, multiplicerar vi den första ekvationen med 2 och den andra med –5.

1. $\begin{cases} 10x+4y=4a & (1) \\ -10x-15y=-15a & (2) \end{cases}$

2. Vi adderar ekvationerna led för led och får

$-11y=-11a$ (Dividera med –11)

$y=a$

3. $y=a$ insättes i ekvationen (1)

$5x+2\cdot a=2a \Rightarrow$

$5x=0 \Rightarrow$ (Dividera med 5)

$x=0$

Svar: $x=0$, $y=a$

Exempel 3. Lös följande ekvationssystem med avseende på x och y

$\begin{cases} 3x+10y=3a+13 & (1) \\ 2x-y=2a+1 & (2) \end{cases}$

Lösning. Den här gången är det lett att eliminera y-termerna. Vi multiplicerar den andra ekvationen med 10 .

1. $\begin{cases} 3x+10y=3a+13 \\ 20x-10y=20a+10 \end{cases}$

2. Ledvis addition ger

$23x=23a+23$ (Dividera med 23)

$x=a+1$

3. $x=a+1$ insättes i ekvationen (2)

$2a+2-y=2a+1 \Rightarrow$

$y=1$

Svar: $x=a+1$, $y=1$

Exempel 4. I nedanstående ekvationssystem är $a>0$ och $b>0$. Bestäm x och y.

$\begin{cases} ax-by=3a-2b & (1) \\ bx+ay=2a+3b & (2) \end{cases}$

Lösning. För att få bort *y*-termerna vid additionen, multiplicerar vi den första ekvationen med *a* och den andra med *b*.

1. $\begin{cases} a^2x - aby = 3a^2 - 2ab \\ b^2x + aby = 2ab + 3b^2 \end{cases}$

2. Ledvis addition ger

$a^2x + b^2x = 3a^2 + 3b^2$ (Faktorisera)

$(a^2 + b^2)x = 3(a^2 + b^2)$ (Dividera med $(a^2 + b^2)$ som är enligt antagande $\neq 0$)

$x = 3$

3. Vi insätter $x = 3$ i ekvationen (2)

$3b + ay = 2a + 3b \Rightarrow$

$ay = 2a \Rightarrow$

$y = 2$

Svar: $x = 3$, $y = 2$

ÖVNINGAR: (Additionsmetoden)

Använd additionsmetoden för att lösa följande ekvationssystem (med avseende på x och y):

1. $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y = 2a + 3b \\ 3x + 2y = 3a + 2b \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x + y = 2a + 3b \\ 3x - 2y = 3a + b \end{cases}$

5. I nedanstående ekvationssystem är $a > 0$. Bestäm x och y.

$\begin{cases} ax + y = a + 1 \\ -x + ay = a - 1 \end{cases}$

6. I nedanstående ekvationssystem är $a > 0$ och $b > 0$. Bestäm x och y.

$\begin{cases} ax - by = a^2 \\ bx + ay = ab \end{cases}$

Svar:

1. $x = 3$, $y = 1$ **2.** $x = 2$, $y = -1$

3. $x = a$, $y = b$ **4.** $x = a + b$, $y = b$

5. $x = 1$, $y = 1$ **6.** $x = a$, $y = 0$

EXPONENTIALEKVATIONER

(Ekvationer som har obekanta i en eller flera exponenter.)

Metod 1. Med hjälp av potenslagar skriver vi båda leden som potenser med lika baser

(en potens på varje sida)

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

Därefter identifierar vi exponenter och får enklare ekvation

$$f(x) = g(x).$$

Här finns potenslagar som vi oftast använder när vi löser exponentialekvationer:

Potenser med reella exponenter: Uttrycket a^x är definierad för alla reella x om basen $a > 0$.

Om a>0, b>0 , *x* och *y* är reella tal då gäller följande potenslagar:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^0 = 1 \quad ,$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x,$$

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$ (Om $a > 0$, *p* och q hela tal, $q \neq 0$)

Exempel1.

Lös ekvationen

$$2 \cdot 4^x = 8$$

Lösning:

Det är enkelt att skriva 4 och 8 som potenser med basen 2, $4 = 2^2$ och $8 = 2^3$.

Vi använder potenslagar och skriver båda leden som potenser med basen 2

$$2 \cdot 4^x = 8 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (2^2)^x = 2^3 \Leftrightarrow$$

$$2^1 \cdot 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow$$

$$2^{2x+1} = 2^3 \qquad (\,ekv\ 1)$$

Vi harskrivit vänsterledet som EN potens med basen 2 och högerledet som EN potens med SAMMA bas).

Därför kan vi identifiera exponenter i ekv 1

$$2^{2x+1} = 2^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$2x + 1 = 3 \qquad (\,Vi\ har\ fått\ en\ enkel\ ekvation)$$

$$2x = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

(Anm: Den här gången är det enkelt att kontrollera lösningen: $2 \cdot 4^1 = 8$, OK)

Svar. $x = 1$

Exempel 2.

Lös ekvationen

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{3x} = \sqrt{8}$$

Lösning:

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{3x} = \sqrt{8} \Leftrightarrow$$

$$2^{-2} \cdot 2^{3x} = \sqrt{2^3} \Leftrightarrow$$

$$2^{3x-2} = 2^{3/2} \Leftrightarrow$$

(Vi identifierar exponenter och får en enkel ekvation)

$$3x - 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$3x = 2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$3x = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{7}{6}$$

Svar: $x = 7/6$

Exempel 3.

Lös ekvationen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \frac{9}{4}$$

Lösning:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} \qquad (\,ej\ lika\ baser!)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Nu har vi lika baser och kan identifiera exponenter

$$x + 1 = -2 \Leftrightarrow$$

$$x = -3$$

Svar. x = – 3

Exempel 4.

Lös ekvationen

$$5 \cdot 5^{x+1} = 1$$

Lösning:

$$5 \cdot 5^{x+1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$5^{x+2} = 1 \Leftrightarrow$$

Det är uppenbart att exponent x+2 = 0 och $x = -2$.

Alternativt men vi kan också skriva 1 som 5^0

$$5^{x+2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$5^{x+2} = 5^0 \Leftrightarrow \quad (\, lika\ baser)$$

$$x = -2$$

Svar: $x = -2$

Exempel 5.

Lös ekvationen

$$2^{x+1} = 5^{x+1}$$

Lösning:

$$2^{x+1} = 5^{x+1}$$

Den här gången har vi olika baser men samma exponent. Vi delar ekvationen med 5^{x+1} och får

$$\frac{2^{x+1}}{5^{x+1}} = 1$$

Som vi kan skriva

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = 1$$

Och därför $x + 1 = \ 0$ eller $x = -1$.

Svar: $x = -1$

Uppgift 1.

Lös följande exponentialekvationer

a) $2^x = 8$ b) $10^x = 1/100$

c) $3 \cdot 9^x = 27$ d) $\frac{1}{5} \cdot 25^x = \sqrt{5^x}$

e) $3^{2x+4} = 4^{2x+4}$ f) $7 \cdot 13^{2x-2} = 7 \cdot 4^{2x-2}$

Svar: a) $x = 3$ b) $x = -2$ $c)$ $x = 1$

d) $x = 2/3$ e) $x = -2$ f) $x = 1$

Några exponentialekvationer (som innehåller potenssummor) löser vi genom att vi först **faktoriserar** båda leden

Uppgift 2. Lös följande exponentialekvationer.

(Tips: Faktorisera först varje led genom att bryta ut en gemensam faktor.)

$a)\quad 3^{x+2} + 5\cdot 3^{x+1} + 2\cdot\ 3^x = 26$

$b)\quad 2^{x+2} + 3\cdot 2^{x+1} + 5\cdot\ 2^x = \frac{15}{2}$

Lösning a)

$$3^{x+2} + 5\cdot 3^{x+1} + 2\cdot\ 3^x = 26 \;\Leftrightarrow 3^x(\,3^2 + 5\cdot 3^1 + 2) = 26 \;\Leftrightarrow$$

$$3^x \cdot 26 = 26 \;\Leftrightarrow 3^x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$$

Svar: $a)\ x = 0$ b) $x = -1$

Uppgift 3. Lös följande exponentialekvationer med hjälp av en lämplig substitution.

a) $5^{2x} - 6\cdot 5^x + 5 = 0$ b) $2^{2x} - 6\cdot 2^x + 8 = 0$

Lösning a)

Med hjälp av substitutionen

$5^x = t$ (*)

får vi en **andragradsekvation**

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

Som har två rötter $t_1 = 1 \;\; och \;\; t_2 = 5$ (kontrollera själv)

Nu bestämmer vi motsvarande x med hjälp av substitutionen $5^x = t$.

$5^x = 1$ ger $x_1 = 0$

och

$5^x = 5$ ger $x_2 = 1$

Svar: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$

b) $x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

Metod 2. (Logaritmering av båda leden)

Den här metod används oftast om vi INTE kan skriva båda leden med hjälp av en bas som t ex i ekvationen (där b $b \neq d$)

$$a \cdot b^{f(x)} = c \cdot d^{g(x)}$$

För att förenkla ekvationen logaritmerar vi båda leden. Man kan använda vilken som helst logaritmbas men vi använder oftast basen e ($\approx$ 2.7) eller basen 10.

Alltså får vi

$$\ln\left(a \cdot b^{f(x)}\right) = \ln\left(c \cdot d^{g(x)}\right)$$

Anmärkning: Innan man använder den här metoden måste man repetera logaritmlagar speciellt nedanstående (där a, b>0):

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = \mathrm{n} \cdot \ln a$$

$$\ln(1) = 0$$

Exempel1.

Lös ekvationen

$$2 \cdot 3^x = 5$$

Lösning:

Vi logaritmerar båda leden (vi kan t ex välja logaritm med basen e, den naturliga logaritmen) och får

$$\ln\left(2 \cdot 3^x\right) = \ln(5),$$

som vi utvecklar med hjälp av logaritmlagar:

$\ln(2) + \ln\left(3^x\right) = \ln(5)$ (regeln: $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$)

Vi förenklar vidare och får en enkel (linjär) ekvation

$\ln(2) + x\ln(3) = \ln(5)$ [regeln $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$)]

Härav

$$x \ln 3 = \ln 5 - ln2$$

och

$x = \frac{\ln 5 - ln2}{\ln 3}$ $[= \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln 3}]$

Svar: $\boldsymbol{x} = \frac{\ln 5 - ln2}{\ln 3}$

U**ppgift 4.** Lös följande exponentialekvationer

a) $2 \cdot 3^x = 5 \cdot 7^x$ b) $3 \cdot 5^{x+4} = 2$

Svar: a) x = $\frac{\ln 5 - ln2}{\ln 3 - \ln 7}$ $(= \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{7}\right)})$

b) $x = \frac{\ln 2 - ln3 - 4ln5}{\ln 5}$

LOGARITMER

Definition av begreppet logaritm

Betrakta ekvationen $a^x = b$. Om *a* är ett **positivt tal skilt från 1** och **b >0** då finns det

exakt en exponent x som satisfierar ekvationen. Den okända exponent ***x*** i ekvationen $a^x = b$ kallas **logaritm av *b* i basen *a*** och betecknas

$$\mathrm{x} = \log_a b$$

(i några böcker ^{a}log b eller a-log b)

[Anmärkning: Basen *a* i en logaritm kan inte vara 1 eftersom ekvationen $1^x = b$ har antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar]

Exmpel 1. a) $\log_2 8 = 3$ eftersom $2^3 = 8$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$ eftersom $2^{-3} = 1/8$

c) $\log_2 2 = 1$ eftersom $2^1 = 2$

d) $\log_2 1 = 0$ eftersom $2^0 = 1$.

Logaritmen $\log_a b$ är definierad om *a* , *b* är positiva och $a \neq 1$ men

notera att **resultat** kan vara negativt, 0 eller positivt; t ex

$$\log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = -2, \quad \log_5(1) = 0 \text{ och } \log_5(25) = 2$$

Här följer en formell definition av logaritmen med basen *a*.

Definition.

Låt a och b vara positiva tal och $a \neq 1$.

$$\log_a b = \mathrm{n} \Leftrightarrow a^n = b$$

Talet n kallas logaritm av *b* i basen *a* (eller *a*-logaritm av *b*).

Med hjälp av definitionen kan man härleda nedanstående logaritmlagar.

RÄKNELAGAR: **(Vi antar att $a, x, y > 0$ och $a \neq 1$)**

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$$

$$\log_a(a^n) = n \quad , \qquad a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0$$

BASBYTE:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (där a,b,c > 0 och dessutom baserna a,c skilda från 1)

Uppgift 1. Beräkna följande logaritmer (utan hjälp av miniräknare)

a) $\log_2 16$ b) $\log_3 27$ c) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$ d) $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)$

e) $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$ f) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$ g) $\log_3 1$ h) $\log_4 1$

i) $\log_{10} 10$, j) $\log_{13} 13$ k) $\log_{19.5} 19.5$ l) $\log_e e$ ($e \approx 2.7$)

m) $\log_3(3^{2})$, n) $\log_2(2^{5})$ o) $\log_{10}(10^{7})$ p) $\log_e(e^{11})$

r) $\log_{10} 1000$ s) $\log_{10} 0.001$ t) $\left[\log_5 25 + \log_5\left(\frac{1}{25}\right)\right]^{234}$

u) $[\log_{10} 0.001 + \log_2 4\ ]^{449}$ v) $\left[\log_2 4 + \log_2\left(\frac{1}{8}\right)\right]^{448}$

Lösning för uppgift a) och uppgift u).

a) $\log_2 16 = 4$ eftersom $2^4 = 16$

u) $[\log_{10} 0.001 + \log_2 4\ ]^{449} = [-3 + 2\ ]^{449} = [-1\ ]^{449} = -1$

Svar:

a) 4 b) 3 c) -2 d) -1

e) –3 f) –2 g) 0 h) 0

i) 1 j) 1 k) 1 l) 1

m) 2 {eftersom $3^{2} = 3^{2}$} n) 5 o) 7 p) 11

r) 3 s) -3 t) 0

u) -1 v) 1

==

Vi använder oftast två typer av logaritmer:

1. logaritm med basen 10, som vi betecknar **lg** och

2. logaritm med basen $e \approx 2.716$, som vi betecknar **ln**

(den naturliga logaritmen)

Alltså

$\lg x = \log_{10} \mathrm{x}$ och $\ln x = \log_{\mathrm{e}} \mathrm{x}.$

T ex

$$\lg 1000 = \log_{10} 1000 = 3$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \log_{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

Uppgift 2. Beräkna följande logaritmer (utan hjälp av miniräknare)

a) lg 10000 b) lg 1000000 c) lg 10 d) lg 10^8

e) lg(1) f) lg(1/100) g) lg (1/10) h) lg(0.001) i) lg(0.1)

Svar: a) 4 (eftersom $10^4 = 10000$) b) 6 c) 1 d) 8 (eftersom $10^8 = 10^8$)

e) 0 f) –2 g) –1 h) –3 i) –1

A.H.

Uppgift 3. Beräkna (utan hjälp av miniräknare)

a) $\ln e^8$ b) $\ln e^{-6}$ c) $\ln e$ d) $\ln(1/e)$ e) $\ln \frac{1}{e^2}$

Svar: a) 8 (eftersom $e^8 = e^8$) b) −6 c) 1 d) −1 e) −2

===

Logaritmlagar gäller oavsett vilken bas väljer vi. Vi kan t ex ange räknelagar lagar för basen 10 .

RÄKNELAGAR för 10-logaritmer: **(Vi antar att $x, y > 0$)**

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y$$

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y$$

$$\lg(x^n) = n \lg x$$

$$\lg(10^n) = n \qquad 10^{\lg x} = x$$

$$\lg 10 = 1, \qquad \lg 1 = 0$$

BASBYTE (från basen *a* till 10):

$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ (där a,b > 0 och dessutom basen *a* skild från 1)

Uppgift 3. Använd logaritmlagar och utveckla följande uttryck i en linjär combination av lg(*a*), lg(*b*),...

a) $\lg(abc)$ b) $\lg(a^3\, b^4\, c^8 \sqrt[4]{d})$ c) $\lg(\frac{abc}{xy})$

d) $\lg(\frac{a^{33} b^5}{x^{15}\, y^{17}})$ e) $\lg(\frac{a^3 b^4\, c^8}{x^5\, y^7 \sqrt{z^5}})$

Lösning för uppgift e)

$$\lg\left(\frac{a^3 b^4\, c^8}{x^5\, y^7 \sqrt{z^5}}\right) = \lg(a^3 b^4\, c^8) - \lg\left(x^5\, y^7 \sqrt{z^5}\right) =$$

$$[\lg(a^3) + \lg(b^4) + \lg(c^8)] - \left[\lg(x^5) + \lg(y^7) + \lg\left(z^{\frac{5}{2}}\right)\right]$$

$$= 3\lg a + 4\lg b + 8\lg c - 5\lg x - 7\lg y - \frac{5}{2}\lg z$$

A.H.

Svar: a) $\lg a + \lg b + \lg c$ b) $3\lg a + 4\lg b + 8\lg c + \frac{1}{4}\lg d$

c) $\lg a + \lg b + \lg c - \lg x - \lg y$ d) $33 \lg a + 5 \lg b - 15 \lg x - 17 \lg y$

e) $3\lg a + 4\lg b + 8\lg c - 5 \lg x - 7\lg y - \frac{5}{2}\lg z$

RÄKNELAGAR för den naturliga logaritmen: **(Vi antar att $x, y > 0$)**

$\ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\ln(x/y) = \ln x - \ln y$

$\ln(x^n) = n \ln x$

$\ln(e^n) = n$ $e^{\ln x} = x$

$\ln e = 1,$ $\ln 1 = 0$

BASBYTE (från basen *a* till e):

$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ (där a,b > 0 och dessutom basen *a* skild från 1)

Uppgift 5. Använd logaritmlagar och utveckla följande uttryck i en linjär combination av ln(*a*), ln(*b*),…

a) $\ln\,(a^{13}\, b^4\, c^8\, \sqrt[4]{d^5})$ b) $\ln\,(\frac{abc}{xyz})$

c) $\ln\,(\frac{a^3 b^9}{x^5\, y^{17}})$ d) $\ln\,(\frac{a^3 b^{14}\, c^8}{x^5\, \sqrt{y^{15}}})$

Svar: a) $13 \ln a + 4 \ln b + 6 \ln c + \frac{5}{4}\ln d$ b) $\ln a + \ln b + \ln c - \ln x - \ln y - \ln z$

c) $3 \ln a + 9 \ln b - 5 \ln x - 17 \ln y$ d) $3 \ln a + 14 \ln b + 8 \ln c - 5 \ln x - \frac{15}{2}\ln y$

I några matematiska tillämpningar av logaritmer (t ex logaritmekvationer) måste vi göra omvänt d v s omvandla en linjär kombination av logaritmer till en logaritm .

Uppgift 5. Skriv följande uttryck som **en logaritm**

a) $\ln a + \ln b + \ln c - \ln x - \ln y - \ln z$

b) $2\ln a + 3 \ln b + 4 \ln c - 5 \ln x - 6 \ln y - 7 \ln z$

c) $\lg a + 5\lg b - 11\lg x - 7\lg y$

d) $33\lg a + 5\lg b - 15\lg x - 17\lg y$

Lösning d)

$$33\lg a + 5\lg b - 15\lg x - 17\lg y$$
$$= \lg a^{33} + \lg b^5 - \lg x^{15} - \lg y^{17}$$
$$= \lg \frac{a^{33}b^5}{x^{15}y^{17}}$$

Svar: a) $\ln\left(\frac{abc}{xyz}\right)$ b) $\ln\left(\frac{a^2b^3c^4}{x^5\,y^6z^7}\right)$ c) $\lg\frac{ab^5}{x^{11}y^7}$ d) $\lg\frac{a^{33}b^5}{x^{15}y^{17}}$

Uppgift 7. Använd formeln för **basbyte** för att beräkna (approximativt) nedanstående logaritmer (a,b med miniräknare) .

a) $\log_3 8$, med hjälp av miniräknare b) $\log_5 423$, med hjälp av miniräknare

c) $\log_{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[4]{8})$ (exakt , utan miniräknare) d) $\log_{\sqrt[3]{25}}(\sqrt[3]{5})$ (exakt)

Lösning a) : På en avancerad miniräknare kan vi beräkna 10-logaritmen och den naturliga logaritmen (med basen *e*) . Vi använder formeln för basbyte $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

och byter t ex till naturliga logaritmer (c= e i ovanstående formel) .

Därför

$\log_3 8 = (\text{basbyte}) = \frac{\log_e 8}{\log_e 3} = \frac{\ln 8}{\ln 3} =$ (miniräknare) = $\frac{2.079441542}{1.098612289} = 2.07944$

b) $\log_5 423 = \frac{\ln 423}{\ln 5} = 3.75744$

c) $\log_{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[4]{8}) = (\text{basbyte}) = \frac{\ln(\sqrt[4]{8})}{\ln\sqrt[3]{2}} = \frac{\ln(2^{3/4})}{\ln(2^{1/3})} = \frac{\frac{3}{4}\ln 2}{\frac{1}{3}\ln 2} = 9/4$

d) 1/2

==

A.H.

VIKTIGT: Enligt logaritmens definition är uttrycket $\log_a b$ definierat (som ett reellt tal) endast om *a>0*, *b>0* och dessutom basen $a \neq 1$.

Exempel: Följande uttryck, t ex, är **INTE definierade**

$\lg(-10)$, $\ln(-8)$, $\log_2(-5)$, $\log_3(0)$, $\ln(0)$, $\log_{(-2)}4$, $\log_1 4$

Uppgift 8. Avgör om följande utryck är korrekt definierade:

a) $\log_2 5$ b) $\log_2(\frac{1}{4})$ c) $\log_2(-8)$ d) $\log_{-3} 9$ e) $\log_1 5$

f) ln(23) g) ln(-24) h) lg(23.4) i) lg(-3) j) lg(0) k) ln(0)

Svar: a) ja b) ja c) nej d) nej e) nej

f) ja g) nej h) ja i) nej j) nej k) nej

Uppgift 9. För vilka x är nedanstående uttryck definierade

a) $\log_2(x-5)$ b) $\ln(3-x)$ c) $3\lg(2x-3)$

d) $5\lg(x-3) + 8\lg(5-x)$ e) $2 + 5\ln(x-2) - 2\ln(7-x)$

Lösning för uppgift e)

Följande två villkor måste vara (samtidigt) uppfyllda

Villkor 1 $x-2>0 \Rightarrow x>2$

Villkor 2: $7-x>0 \Rightarrow 7>x \Rightarrow x<7$

Båda villkor är uppfyllda om $2<x<7$

Svar:

a) $x>5$ b) $x<3$ c) $x>\frac{3}{2}$ d) $3<x<5$ e) $2<x<7$

Uppgift 10 . Beräkna y- värden i tabellen

x	1/100	1/10	1	10	100
y=lg(*x*)	*	*	*	*	*

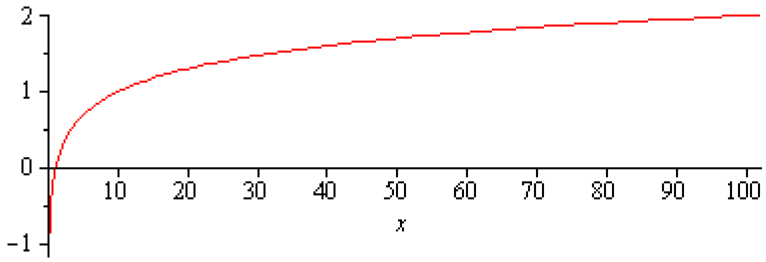
och skissa grafen till funktionen $y = \lg(x)$.

A.H.

Svar:

x	1/100	1/10	1	10	100
y=lg(x)	–2	–1	0	1	2

y=lg(x)



Uppgift 11 . Beräkna y- värden i tabellen

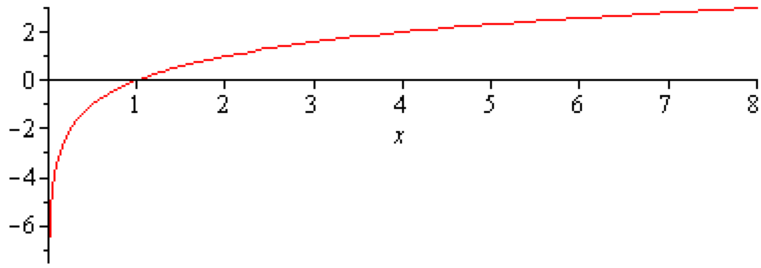
x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
$y = \log_2(x)$	*	*	*	*	*	*	*

och skissa grafen till funktionen $y = \log_2(x)$.

Svar:

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
$y = \log_2(x)$	–3	–2	–1	0	1	2	3

$y = \log_2(x)$



A.H.

LOGARITMEKVATIONER

Vi ska visa först hur man löser två ofta förekommande grundekvationer

Typ 1. $\log_a\big(f(x)\big) = n$

och

Typ2. $\log_a\big(f(x)\big) = \log_a\big(g(x)\big)$

När vi löser logaritmekvationer måste vi tänka på att **argument till logaritmer måste vara positiva**.

(i ovanstående ekvationer $f(x) > 0$ och $g(x) > 0$).

Det är best att börja lösningsprocess med **ekvationens definitionsmängd**.

Bland våra formella lösningar accepterar vi **endast de som ligger i ekvationens definitionsmängd.**

==

Typ1-ekvationer löser vi enligt logaritmens definition

$$\log_a\big(f(x)\big) = n \Rightarrow \quad f(x) = a^n$$

==

Typ2-ekvationer löser vi genom att identifiera argument

$\log_a\big(f(x)\big) = \log_a\big(g(x)\big) \;\Rightarrow\; \quad f(x) = g(x)$

dessutom måste alla argument vara positiva d v s $f(x) > 0$ och $g(x) > 0$.

==

Exempel 1. (Typ1) Lös ekvationen

$$\log_5(2x-3) = 2.$$

Lösning:

Ekvationen är definierad om $2x - 3 > 0$

d v s om villkor

V1: x $> 3/2$

är uppfylld

Vi har

$$\log_5(2x-3)=2 \Rightarrow 2x-3=5^2 \quad \Rightarrow 2x=28 \ \Rightarrow x=14$$

Eftersom x=14 satisfierar villkor **V1,** accepterar vi lösningen.

Svar: $x=14.$

Exempel 2. (Typ2) Lös ekvationen

$$\log_3(x-3)=\log_3(7-x)$$

Lösning:

Först bestämmer vi ekvationens **definitionsmängd:**
Ekvationen är definierad om följande två villkor är uppfyllda:

V1: $x-\ 3>0$ dvs $\boldsymbol{x}>3$ och

V2: $7-x>0$ dvs $\boldsymbol{x}<\mathbf{7}$

Båda villkor är uppfyllda om **3< x <7**

Nu har vi

$\log_3(x-3)=\log_3(7-x)$ (typ 2; vi identifierar argument)

$\Rightarrow x-3=7-x \ \Rightarrow 2x=10 \ \Rightarrow x=5$

Eftersom $x=5$ satisfierar båda villkor, V1 och V2, accepterar vi lösningen.

Svar: x $=5$

===

Om vi har mer komplicerade ekvationer använder vi logaritmlagar och förenklar ekvationer till Typ1 eller Typ2. Oftast använder vi följande tre lagar:

$\log_a x+\ \log_a y=\log_a(xy)$

$\log_a x-\ \log_a y=\log_a(x/y)$

$n\cdot\log_a x=\log_a(x^n)$

Vi upprepar att

$\lg x=\log_{10} x$ och

$\ln x=\log_e x$ där e ≈ 2.7

===

A.H.

Exempel 3. Lös ekvationen

$$\log_3(x-2)+\log_3 x = 1$$

Lösning:

Först bestämmer vi ekvationens **definitionsmängd:**

Villkor V1: $x - 2 > 0$ dvs $\boldsymbol{x > 2}$

Villkor V2: x $> \mathbf{0}$

Anmärkning: Varje lösning måste uppfylla **båda villkor.**

(I vårtexempel, om x>2 är båda villkor uppfyllda.)

Vi löser ekvationen genom att skriva vänsterledet som en logaritm:

$$\log_3(x-2)+\log_3 x = 1 \;\Rightarrow$$
$$\log_3[\mathrm{x}(x-2)] = 1 \;\Rightarrow$$

$$\mathrm{x}(x-2) = 3^1 \;\Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\,andrgradsekvationen)$$

$$x_1 = 3 \quad och\; x_2 = -1$$

Endast lösningen $x_1 = 3$ uppfyller båda villkor V1 och V2.

Svar : En lösning $x_1 = 3$

Exempel 4. Lös ekvationen

$$\lg(x+2)+\lg 4 = \lg(\mathrm{x}+1) \;+\lg 2$$

Lösning:

Först bestämmer vi ekvationens **definitionsmängd:**

V1: $x + 2 > 0$ dvs $x > -2$

V2: $x + 1 > 0$ dvs $x > -1$

Anmärkning 1. Om $x > -1$ är båda villkor samtidigt uppfyllda.

A.H.

Anmärkning 2. Argument i $\lg 4$ och $\lg 2$, d v s konstanter 4 och 2, är positiva.

Vi skriver varje sida som EN logaritm:

$\lg(x+2) + \lg 4 = \lg(\mathrm{x}+1) + \lg 2 \Rightarrow$

$\lg[\,4(x+2)] = \lg[\,2(\mathrm{x}+1)\,] \Rightarrow$ (vi identifierar argument)

$4x + 8 = 2x + 2 \Rightarrow$

$2x = -6 \Rightarrow$

$x = -3$

Eftersom -3 INTE uppfyller krav V1, V2, kan vi INTE acceptera $x = -3$ som en lösning.

Svar: Ekvationen har INGEN lösning.

Exempel 5. Lös ekvationen

$$\ln(x+2) - 2\ln 5 = 3\ln 2$$

Lösning:

Först bestämmer vi ekvationens **definitionsmängd:**

V1: $x + 2 > 0$ dvs $\boldsymbol{x > -2}$.

Med hjälp av logaritmlagar skriver vi varje sida som EN logaritm:

$\ln(x+2) - 2\ln 5 = 3\ln 2 \Rightarrow$ (vi använder regeln $n \cdot \ln x = \ln x^n$)

$\ln(x+2) - \ln 5^2 = \ln 2^3 \Rightarrow$ (vi använder regeln $\ln x - lny = \ln\frac{x}{y}$)

$\ln\frac{(x+2)}{25} = \ln 8 \Rightarrow$ (vi identifierar argument)

$\frac{x+2}{25} = 8 \Rightarrow x + 2 = 200 \Rightarrow x = 198$

Eftersom $x = 198$ satisfierar villkor V1 är det en lösning.

Svar: $\mathrm{x} = 198$

Uppgift 1. Lös nedanstående ekvationer.

a) $\log_4(x-2)=2$ b) $3\log_2(x+1)=2$ c) $3\lg(2-x)=6$

d) $2\ln(2x+1)=4$ e) $\lg(x+1)+2\lg 3 = 1$

Lösning c) Definitionsmängd: $2-x>0 \Rightarrow 2>x \Rightarrow \boldsymbol{x}<2$

$$3\lg(2-x)=6 \Rightarrow \lg(2-x)=2 \Rightarrow \quad 2-x=10^2 \Rightarrow 2-x=100 \Rightarrow x=-98$$

Eftersom vi accepterar lösningen eftersom $x=-98$ uppfyller kravet $\boldsymbol{x}<2$.

Svar: a) $x=18$ b) $x=-1+2^{2/3}$ c) $x=-98$

d) $=\frac{-1+e^2}{2}$ e) $x=1/9$

Uppgift 2. Lös nedanstående ekvationer.
Tipps: Glöm inte ekvationens definitionsmängd.

a) $\log_2(x-2)+\log_2(5)=\log_2(x-3)+\log_2(3)$

b) $\lg(x-3)+\lg(5)=\lg(x-4)+\lg(6)$

c) $\lg(x)+\lg(x-1)=\lg 2$

Svar: a) Ingen lösning b) $x=9$ c) x =2 (notera att definitionsmängden är x > 1)

Uppgift 3. Lös nedanstående ekvationer med hjälp av lämpliga substitutioner.

a) $(\lg x)^2-5\lg x+6=0$ b) $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$

Lösning a) ekvationen är definierad om $\boldsymbol{x}>0$

Substitutionen $\mathbf{lg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$

ger

$$t^2-5t+6=0$$

och $t_1=2,\quad t_2=3.$

Från $\mathbf{lg}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$ får vi

$\lg x=2 \Rightarrow \quad x=10^2 \quad \Rightarrow \quad x_1=100$

$\lg x=3 \Rightarrow \quad x=10^3 \quad \Rightarrow \quad x_2=1000$

Båda lösningar ligger i definitionsmängden.

Svar: a) $x_1 = 10^2$, $x_2 = 10^3$ b) $x_1 =$ e , $x_2 = e^2$

Uppgift 3. Lös nedanstående ekvationer

a) $x^{lgx} = 10^4$ b) $x^{(-3+lgx)} = 10^4$

Tips. Logaritmera båda leden.

Lösning a)

Definitionsmängd: x>0

$$x^{lgx} = 4 \Rightarrow \lg(x^{lgx}) = \lg 10^4 \Rightarrow \lg x \cdot \lg x = 4 \Rightarrow (\lg x)^2 = 4 \Rightarrow \lg x = \pm 2$$

$x_1 = 10^2$, $x_2 = 10^{-2}$

Svar: a) $x_1 = 10^2$, $x_2 = 10^{-2}$, b) $x_1 = 1/10$, $x_2 = 10^4$,

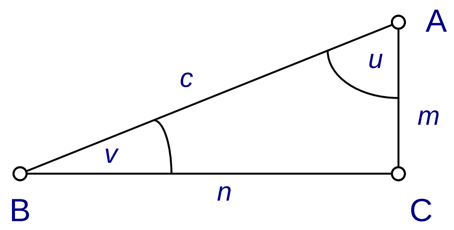
TRIGONOMETRISKA FUNKTIONER I RÄTVINKLIGA TRIANGLAR

$$\sin v = \frac{motst\mathring{a}ende\ katet}{hypotenusan} = \frac{m}{c}$$

$$\cos v = \frac{n\ddot{a}rliggande\ katet}{hypotenusan} = \frac{n}{c}$$

$$\tan v = \frac{motst\mathring{a}ende\ katet}{n\ddot{a}rliggande\ katet} = \frac{m}{n}$$

$$\cot v = \frac{n\ddot{a}rliggande\ katet}{motst\mathring{a}ende\ katet} = \frac{n}{m}$$



$$u + v + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow u + v = 90^\circ$$

Pytagoras sats: $m^2 + n^2 = c^2$

Exakta värden av trigonometriska funktioner för vinklarna 30°, 45° och 60° grader.

vinkelmått i grader	**30°**	**45°**	**60°**
vinkelmått i radianer	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos v$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan v$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ \left(=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	1	$\sqrt{3}$
$\cot v$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exempel 1.Härled följande formler:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan 45^\circ = 1, \ \cot 45^\circ = 1.$$

Lösning.

Vi ska bestämma funktionernas värden med hjälp av en halvkvadrat (se bilden).
Först beräknar vi kvadratens diagonal med hjälp av Pytagoras sats

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Enligt definitionen av trigonometriska funktioner gäller då:

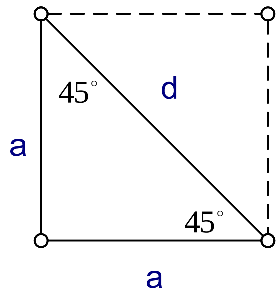
$$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

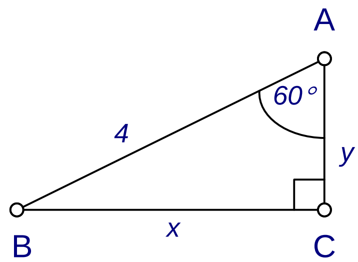
$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1,$$

och

$$\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$



Exempel 2. Figuren visar en rätvinklig triangel. Bestäm x och y. Svara exakt.



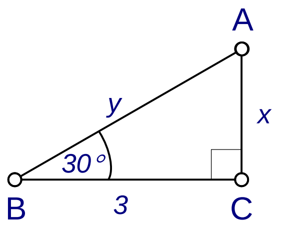
Lösning.

$$\frac{x}{4} = \sin 60^\circ \Rightarrow x = 4 \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{y}{4} = \cos 60^\circ \Rightarrow y = 4 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow y = 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

Svar: $x = 2\sqrt{3}$, $y = 2$

Exempel 3. Bestäm x och y i nedanstående figur. Svara exakt.



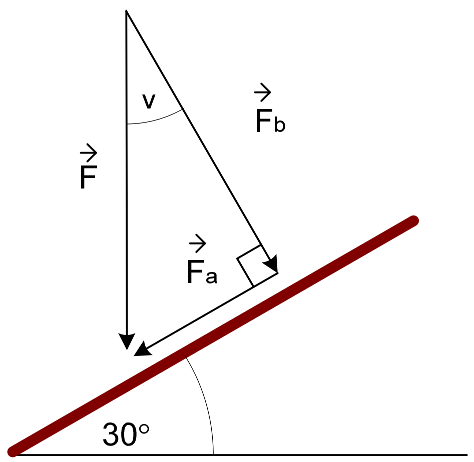
Lösning.

$$\frac{x}{3} = \tan 30^\circ \Rightarrow x = 3 \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\frac{3}{y} = \cos 30^\circ \Rightarrow 3 = y \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow y = \frac{3}{\cos 30} \Rightarrow y = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Svar: $x = \sqrt{3} \quad y = 2\sqrt{3}$

Exempel 4. Bestäm Fa och Fb i nedanstående figur om F=40 kN. Svara exakt.



Lösning. Eftersom v= 30° har vi

$$\frac{Fa}{F} = \sin v \Rightarrow Fa = F \cdot \sin 30^\circ \Rightarrow Fa = 40 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow Fa = 20$$

$$\frac{Fb}{F} = \cos v \Rightarrow Fb = F \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow Fb = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Fb = 20\sqrt{3}$$

Svar: $Fa = 20$ kN, $Fb = 20\sqrt{3}$ kN

ÖVNINGAR

1. Beräkna exakt

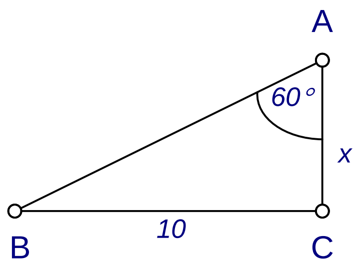
a) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ b) $2\sin 60^\circ + 4\cos 45^\circ$

c) $(2\sin 30^\circ + 2\cos 60^\circ - 3\tan 45^\circ)^{33}$ d) $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^4$

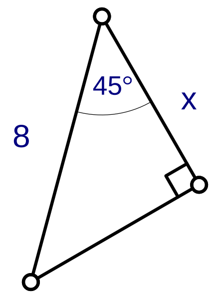
e) $\left(1 + \tan(\frac{401\pi}{4})\right)^2$ f) $\left(2\sin(\frac{\pi}{3}) + \tan(\frac{17\pi}{4})\right)^2$

2. Bestäm x i nedanstående figur. Svara exakt.

a)

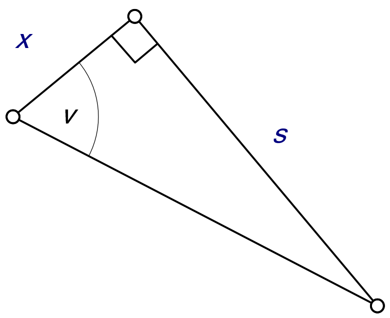


b)

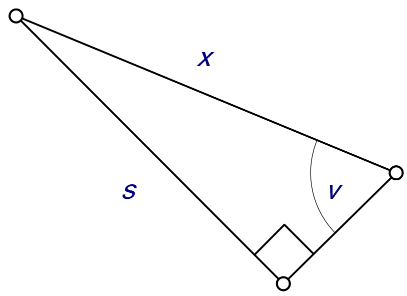


3. Ange x som en funktion av sidan *s* och vinkeln v.

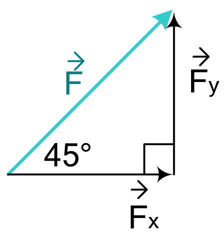
a)



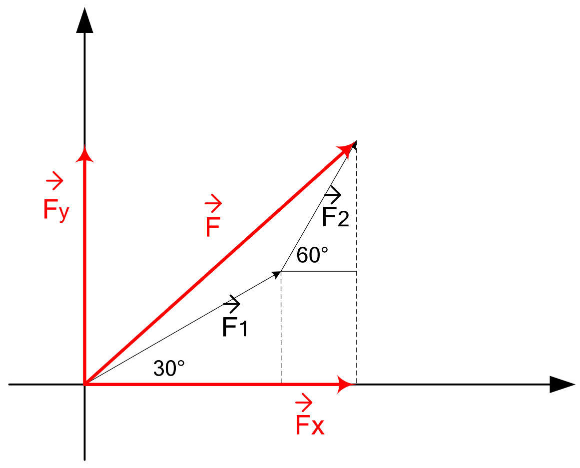
b)



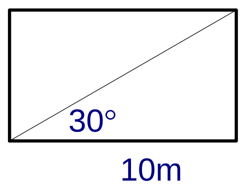
4. Bestäm komponenter F_x och F_y om F= 10 N. Svara exakt.



5. I nedanstående figur gäller $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Bestäm komponenter F_x och F_y om $F_1 = 3$ N och F_2=2 N.



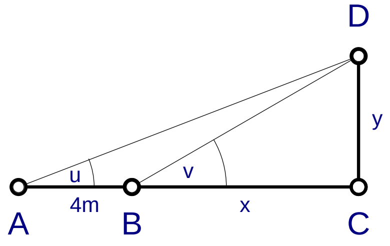
6. Hur stor är arean av nedanstående rektangel?



7. I nedanstående figur är u och v givna vinklar och AB= 4m.

a) Ange ett ekvationssystem (2 ekvationer) med obekanta *x* och *y*.

b) Bestäm x och y. **(**Utryck *x* och y som funktioner av *u* och *v*)



Svar:

1. **a)** 2   **b)** $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

c) -1 **d)** 4

e) 4   **f)** $4+2\sqrt{3}$

2. **a)** $x=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ **b)** $x=4\sqrt{2}$

3. **a)** $x=s\cdot\cot v$ **b)** $x=\dfrac{s}{\sin v}$

4. $F_x=5\sqrt{2}$ **N** $F_y=5\sqrt{2}$ **N**

5. $F_x=1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **N** $F_y=\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$ **N**

6. $A=\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ **m²**

7. **a)** **Ekvation 1:** $y=x\tan v$

Ekvation 2: $y=(x+4)\tan u$

Ekvationssystem:

$$\begin{cases} y=x\tan v \\ y=x\tan u+4\tan u \end{cases}$$

b) $x=\dfrac{4\tan u}{\tan v-\tan u}$, $\quad y=\dfrac{4\tan u\tan v}{\tan v-\tan u}$