



KTH Teknikvetenskap

**SF1626 Flervariabelanalys**  
**SEMINARIEUPPGIFT 3**  
**läsåret 12/13**

Se [www.kth.se/social/course/SF1626](http://www.kth.se/social/course/SF1626) för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

---

UPPGIFTER TILL SEMINARIUM 3

**Uppgift 1.** Beskriv först områdena i deluppgifterna med hjälp av villkor på formen

$$f(x) \leq y \leq g(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Beskriv sedan också områdena med villkor på formen

$$h(y) \leq x \leq k(y), \quad c \leq y \leq d.$$

Beräkna slutligen dubbelintegralen av funktionen  $f(x, y) = xy$  över vart och dessa områden på vardera två olika sätt.

- Triangeln med hörn i  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  och  $(2, 0)$ .
- Området som begränsas av kurvorna  $y = \sqrt{x}$  och  $y = x^3$ .

**Uppgift 2.** En kilformad kropp beskrivs av olikheterna

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 0,5 \text{ [m]}, \\ 0 \leq y \leq 2,0 \text{ [m]}, \\ 0 \leq z \leq 0,5y \text{ [m]}. \end{cases}$$

Densiteten i kroppen varierar enligt  $\rho(x, y, z) = y(1 - z)$  [kg/m<sup>3</sup>]. Beräkna kroppens massa.

**Uppgift 3.** Kroppen  $K$  begränsas av konen  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  och sfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  samt innehåller punkten  $(0, 0, -1)$ .

- Hur beskrivs  $K$  med olikheter i sfäriska koordinater?
- Försök att beskriva  $K$  med olikheter i cylindriska koordinater.
- Beräkna integralen  $\iiint_K z^2 dx dy dz$ .

**Uppgift 4.** Kroppen  $K$  begränsas av paraboloidytorna  $z = x^2 + y^2$  och  $z = 2 - x^2 - y^2$ . Beräkna integralen

$$\iiint_K (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

V.g. vänd!

**Uppgift 5.** En av Guldins regler lyder:

Då ett plant ytstycke, som helt ligger på ena sidan om en rät linje i dess plan roterar ett varv kring linjen alstras en kropp vars volym ges av

$$V = (\text{ytstyckets area}) \cdot \left( \begin{array}{l} \text{den sträcka ytstyckets tyngdpunkt} \\ \text{beskriver vid rotationen} \end{array} \right).$$

Ytstycket tänks därvid vara en platta med konstant densitet.

Visa att regeln gäller för den rotationskropp  $K$  som uppstår om triangeln i  $xz$ -planet med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  och  $(1, 1)$  roteras ett varv i  $xyz$ -rummet kring  $z$ -axeln.