KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
SEMINARIEUPPGIFT 4
läsåret 12/13

Se `www.kth.se/social/course/SF1626` för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIUM 4

Uppgift 1.

a) Förklara vad som menas med ett *vektorfält* i planet respektive rummet.
b) Hur definieras att ett vektorfält är konservativt?
c) Förklara vad som menas med att en kurvintegral är oberoende av väg.
d) Red ut sambanden mellan följande utsagor för ett vektorfält $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ definerat i ett sammanhängande område i planet:
   - $\boldsymbol{F}$ är konservativt
   - $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$
   - $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av väg
   - $\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av kurvan γ:s parametrisering.

Uppgift 2. Ett vektorfält $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ i området $x, y > 0$ i planet ges av formlerna

$$P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{ax}{y^2}.$$

För vilka värden på parametern a är vektorfältet konservativt? Bestäm en potential till vektorfältet för sådana a.

Uppgift 3. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}$ i $\mathbb{R}^3$ som ges av $\boldsymbol{F} = (yz, xz, xy)$ och kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

a) Låt γ vara den kurva som ges av $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, t)$ då t löper från 0 till $\pi/4$. Beräkna integralen genom att använda kurvans parametrisering.
b) Visa att fältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt och bestäm en potentialfunktion till $\boldsymbol{F}$. Beräkna nu integralen med hjälp av potentialen.
c) För vilka slutna kurvor γ gäller att integralen är noll?

Uppgift 4. Låt $\boldsymbol{F} = (y^2, x^2)$ och betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

V.g. vänd!

a) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_1$ som är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.
b) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_2$ som är den del av parabeln $y = 1 - x^2$ som går från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$.
c) Beräkna integralen när $\gamma = \gamma_3$ som är den del av enhetscirkeln i första kvadranten som går från punkten $(0, 1)$ till $(1, 0)$.
d) Beräkna integralen när γ är den slutna kurva som består av de två kurvstyckena γ_1 och γ_2
   - genom att utnyttja resultatet i a) och b), och
   - genom att tillämpa Greens formel.