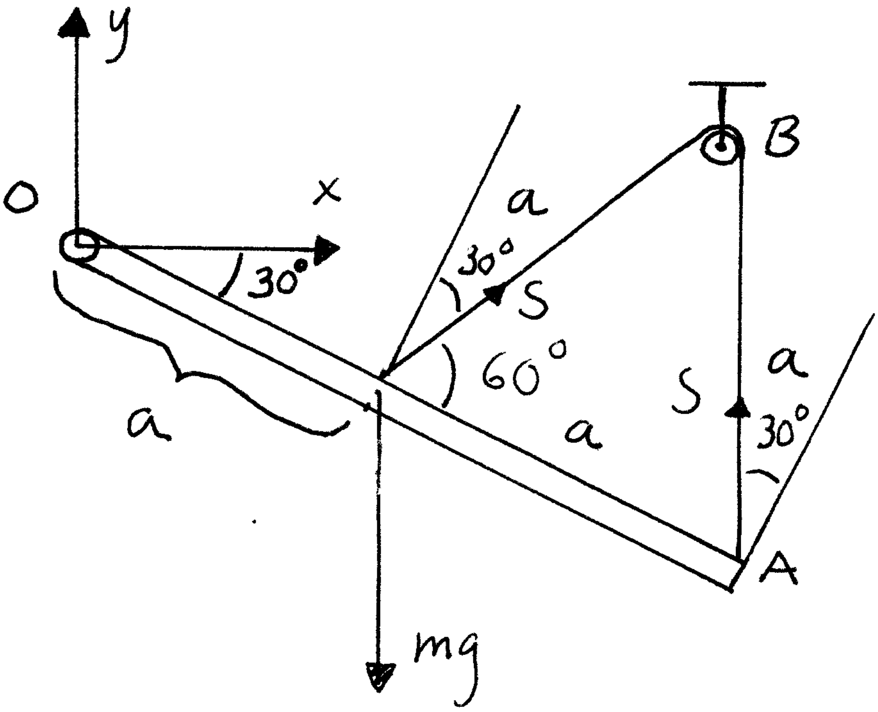
Lösningar, SG1109, SG1130, 29/5, 2012



1. Momentjämvikt kring O ger

$$aS\cos 30^o + 2aS\cos 30^o - amg\cos 30^o = 0 \quad \Rightarrow \quad 3S = mg \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg}{3}\,. \qquad (1)$$

Kraftjämvikt i x- och y-led ger

$$R_x + S\cos 30^o = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = -S\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}mg}{6}\,, \qquad (2)$$

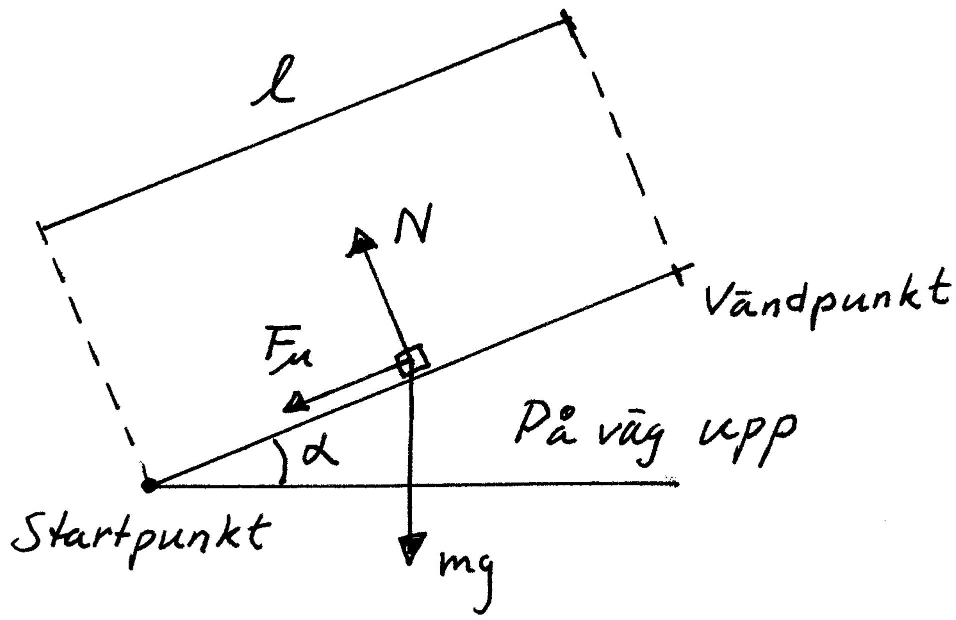
$$R_y + S\cos 60^o + S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = mg - \frac{1}{2}S - S = \frac{mg}{2}\,. \qquad (3)$$

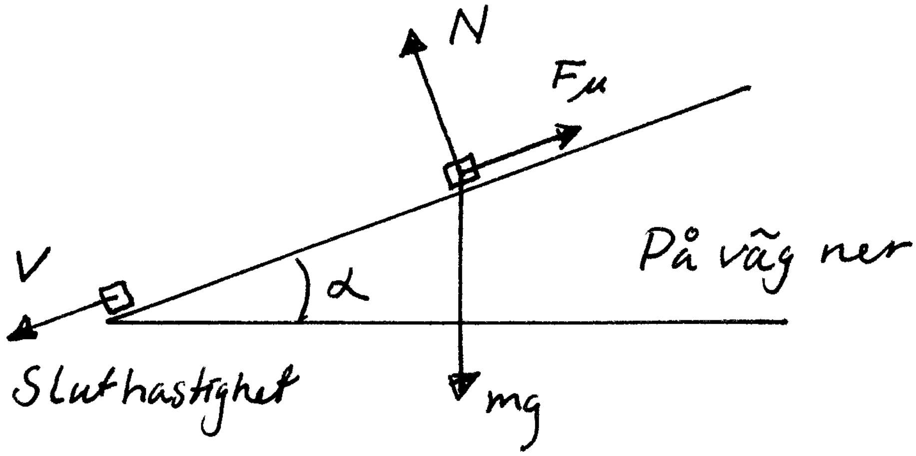
Svar:

$$S = \frac{mg}{3}\,, \qquad \mathbf{R} = \frac{mg}{2}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)\,. \qquad (4)$$

2. Kraftjämvikt i normalled ger

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow N = mg\cos\alpha\,. \tag{5}$$





Både på uppvägen och nervägen ges friktionskraften av

$$F_\mu = \mu N = \mu mg\cos\alpha\,. \tag{6}$$

På uppvägen är den riktad snett nedåt längs planet och på nervägen är den riktad snett uppåt längs planet (se figurer).

Lagen om den kinetiska energin ger

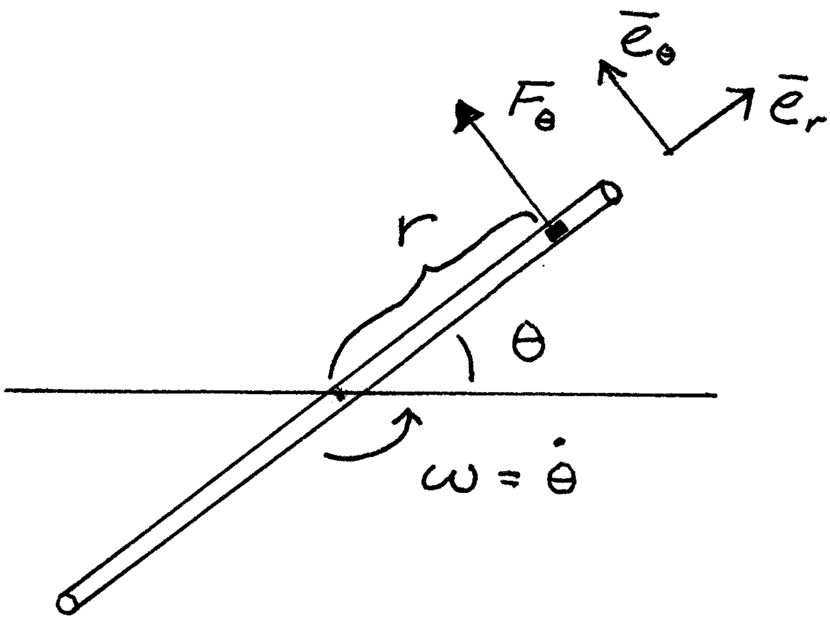
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -l(mg\sin\alpha + F_\mu) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}v_0^2 = lg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\,, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = l(mg\sin\alpha - F_\mu) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}v^2 = lg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,, \tag{8}$$

för uppvägen respektive nervägen, där v är den sökta hastigheten och l den sträcka som partikeln tillryggalägger varje väg. Om vi dividerar (8) med (7) får vi

$$\frac{v^2}{v_0^2} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} \quad\Rightarrow\quad v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{9}$$

3.



Newtons andra lag ger

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0\,, \tag{10}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta\,. \tag{11}$$

Eftersom $\dot{\theta} = \omega$ och $\ddot{\theta} = 0$ får vi alltså

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0\,, \tag{12}$$

$$2m\dot{r}\omega = F_\theta\,. \tag{13}$$

Lösningen till (12) är

$$r = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t) \tag{14}$$

och för derivatan fås alltså

$$\dot{r} = \omega A \exp(\omega t) - \omega B \exp(-\omega t) \tag{15}$$

Begynnelsevillkoren är

$$r = a \text{ och } \dot{r} = 0 \quad \text{då } t = 0 \,, \tag{16}$$

vilket ger

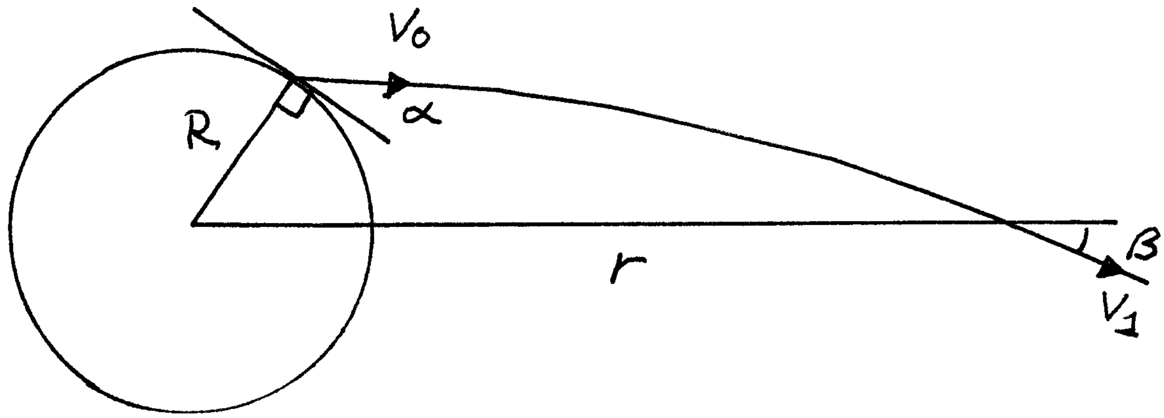
$$a = A + B \,, \quad 0 = \omega(A - B) \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}a \,, \tag{17}$$

och slutligen

$$r = \frac{1}{2}a[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] \,, \tag{18}$$

$$F_\theta = ma\omega^2[\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)] \,. \tag{19}$$

4.



a) Rörelsemängdsmomentets och energins bevarande ger

$$Rmv_0 \cos\alpha = rmv_1 \sin\beta \,, \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - m\frac{gR^2}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 - m\frac{gR^2}{r} \,. \tag{21}$$

Med $v_0 = \sqrt{2gR}$ fås

$$R\sqrt{2gR}\cos\alpha = rv_1 \sin\beta \,, \tag{22}$$

$$0 = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{gR^2}{r} \,. \tag{23}$$

Ekvation (23) ger

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g}{r}R}\,, \tag{24}$$

insatt i (22) ger

$$R\sqrt{2gR}\cos\alpha = r\sqrt{\frac{2g}{r}R}\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = \sqrt{\frac{R}{r}}\cos\alpha\,, \tag{25}$$

och

$$\beta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{R}{r}}\cos\alpha\right). \tag{26}$$

b) För att föremålet ska komma tillbaka till jorden så måste det vända. I ett vändläge gäller att $\beta = \pi/2$. För att det ska komma tillbaka så måste alltså $\sin\beta = 1$ för något $r > R$, men enligt (25) så har vi att $\sin\beta < 1$ för alla $r > R$, eftersom $\sqrt{R/r} < 1$ och $\cos\alpha \leq 1$. Alltså kommer föremålet aldrig tillbaka, oavsett vad utgångsvinkeln α är.