Elektroteknik MF1016 & MF1017 Föreläsning 3. Växelström

Effektivvärde

Vid likström, DC, är det enkelt att ange en siffra på storleken på en spänning eller ström. Om det är en växelström, AC, varierar strömmar och spänningar med tiden och har olika momentanvärden vid olika tidpunkter. Om vi tänker oss att de varierar periodiskt kan medelvärdet över en period vara lämpligt, men ofta är det noll, tillexempel är medelvärdet av spänningen mellan de två hålen i ett vägguttag noll. Det som istället ofta används är något som kallas effektivvärdet. Effektivvärdet av en ström är den likström som ger samma effektutveckling när den flyter genom ett motstånd som strömmen ifråga. Effektivvärdet av en spänning är den likspänning som ger samma effektutveckling i ett motstånd som spänningen ifråga.

Likströmmen ger: $P = R \cdot I^2$
Medeleffekten av en periodisk ström med momentanvärdet *i* blir:

$$P = \frac{1}{T}\int p dt = \frac{1}{T}\int R \cdot i^2 dt = R \cdot \frac{1}{T}\int i^2 dt$$

p är momentanvärdet av effekten.
Likhet mellan de två sambanden ger:

$$I^2 = \frac{1}{T}\int i^2 dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T}\int i^2 dt}$$

Effektivvärdet kallas rms-value på engelska och syftar på det matamatiska uttrycket ovan root mean square.

På samma sätt för spänningen: $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int u^2 dt}$

(det är naturligtvis $P = \frac{U^2}{R}$ istället för $P = R \cdot I^2$ och så vidare)
Om vi har specialfallet med sinusformade storheter så blir effektivvärdet lika med toppvärdet (amplituden) genom roten ur två enligt nedan:

$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ respektive $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

Detta kan kan visas genom att använda följande förkunskaper: integrera, använda en välkänd trigonometrisk formel och att $\omega T = 2\pi$.

Sinusformade växelströmsförlopp

För en sinusformad storhet är $\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U$

Mometanvärdet av till exempel en sinusformad spänning kan därför skrivas:

$u = \sqrt{2} \cdot U \sin(\omega t + \varphi) \; = \; \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right]$

I högerledet finns ett komplext tal men som imäginär enhet används *j* istället för *i* som är det som brukar användas i matematiken. Anledningen är att *i* redan är upptaget för att beteckna momentanvärdet av strömmen.

För att gå från högerledet till vänsterledet används Eulers regel:

$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)$

Och därför blir:

$\sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = \sqrt{2} \cdot U \cdot \mathrm{Im}\left[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\right] = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

I denna skrift används understreck för att visa att det är ett kompext tal.

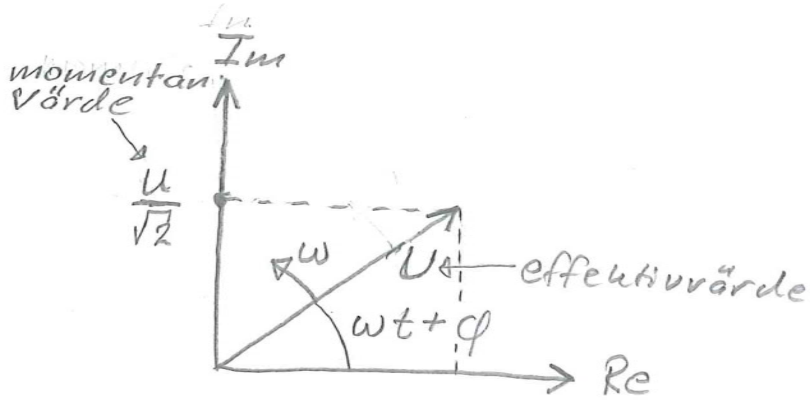
$U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ där $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi}$ kallas den komplexa spänningen.

För att få tidsförloppet används sen $u = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\right]$.

Om det är en ström byts u mot *i* och får då blir det såklart $i = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\right]$ istället och $\underline{I}$ kallas den komplexa strömmen.

Det komplexa talet $\underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ ändras med tiden så att det kan ses som en roterande visare i ett komplext talplan. Längden på denna visare är *U* (eller *I*) och den roterar med vinkelhastigheten ω . En sinusformad tidsstorhet kan alltså ses som projektionen av en roterande visare på den imaginära axeln. Projektionen på den imaginära axeln är just imaginärdelen. Konceptet med roterande visare kan man känna igen från grundläggande fysik där den harmoniska svängningen, alstrad av en massa och fjäder, jämfördes med en roterande visare eller skiva, beroende på vilken litteratur man studerade. Där brukade man dock inte tänka sig att rotationen utspelade sig i ett komplext talplan.

Traditionen är att använda effektivvärdet som längd (belopp) på visaren och därför skall projektionen multipliceras med roten ur två för att få momentanvärdet. Kopplingen mellan roterande visare och tidsstorhet visas i figuren nedan.



En sinusformad tidsstorhet kan ses som projektionen av en roterande visare på imaginäraxeln. Visaren roterar med konstant vinkelhastighet.

Kapacitans

En kondensator är uppbyggd av två plattor och har kapacitans. Även en ledning har en litan kapacitans mellan ledarna. För en kapacitans har vi från fysiken:

$$q = C \cdot u \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt} \Rightarrow i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

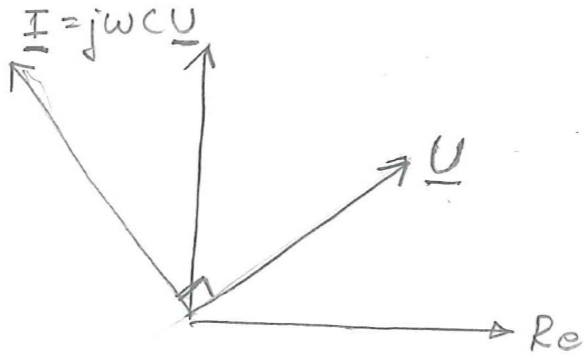
Vi sätter in mometanvärdet av spänningen och deriverar, man kan även byta plats, kommutera, så att vi deriverar det komplexa talet först och därefter tar imaginärdelen.

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[U \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\right]\right) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[C \cdot \frac{d}{dt}\left(U \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\right)\right] = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[j\omega C \cdot U e^{j(\omega t+\varphi)}\right] =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[j\omega C \cdot \underline{U} e^{j\omega t}\right]$$

Sedan tidigare vet vi att $i = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\right]$ och därför listar vi ut att komplexa strömmen kan skrivas:

$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U} = \{j = e^{j\pi/2}\} = \omega C \cdot \underline{U} \cdot e^{j\pi/2} = \omega C \cdot U \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\pi/2} = \omega C \cdot U \cdot e^{j(\varphi+\pi/2)}$$

Vi ser nu att strömmen är spänningen multiplicerad med ωC och vriden 90° = $\pi/2$ radianer framåt. I figuren nedan är både spänning och ström inritade som visare. Eftersom $e^{j\omega t}$ inte är med i uttrycket så finns inte längre något tidsberoende och därmet inte den rotation som faktorn $e^{j\omega t}$ svarade för, visarna är därför stillastående. Rotationen behövs oftast inte, det är visarnas inbördes förhållanden till varandra som ger den information vi behöver.



Visare för ström genom och spänning över en kapacitans

Vi ser i figuren att strömmen ligger 90° före spänningen, man brukar säga att kondensatorn är spänningströg. I momentanvärdena syns naturligtvis även denna så kallade fasvridning på π/2 radianer.

$$i = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\omega C \cdot U \cdot e^{j(\varphi + \pi/2)} \cdot e^{j\omega t}\right] = \sqrt{2} \cdot \mathrm{Im}\left[\omega C \cdot U \cdot e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)}\right] =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \omega C \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

Toppvärdet på strömmen kan skrivas $\sqrt{2} \cdot I$ och jämför vi med ovanstående så får vi följande samband för effektivvärdena:

$$I = \omega C \cdot U$$

Om vi går tillbaka till uttrycket $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ så kan vi redan direkt skriva upp momentanvärdet för strömmen: Ur uttrycket kan man läsa ur multiplikationen med ωC att effekivvärdet av strömmen fås genom att multiplicera spänningens effektivvärde med ωC. Multiplikationen med j innebär en vridning av visare 90° framåt som i sin tur adderar 90° till vinkeln (argumentet i sinusfunktionen).

$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$ gör därför att $u = \sqrt{2} \cdot U \sin(\omega t + \varphi)$ blir $i = \sqrt{2} \cdot \omega C U \sin(\omega t + \varphi + 90°)$ eller vice versa.

Detta gör att vi slipper skriva så mycket. Sammanfattningsvis:

$i = C \cdot \dfrac{du}{dt}$ deriveringen översätts till multiplikation med $j\omega$ som ger $\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U}$.

j vrider 90° framåt, adderar 90° till vinkeln i sinusuttrycket och ωC ger skalningen.

Vi vill även skriva om uttrycket så att det ser ut som ohms lag:

$\underline{U} = \dfrac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$ där $\dfrac{1}{j\omega C}$ ersätter resistansen och kallas komplexa impedansen

Induktans

En spole har induktans. Även en ledning har en liten induktans mellan ledarna. Induktionslagen ger sambandet mella ström och spänning i en induktans:

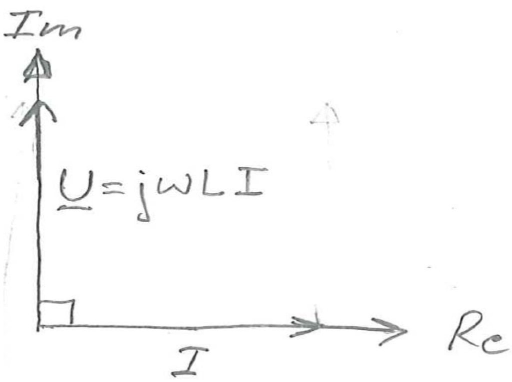
$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Samma resonemang kan föras som för kapacitansen:

$u = L \cdot \frac{di}{dt}$ deriveringen översätts till multiplikation med $j\omega$ som ger $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$.

j vrider $90°$ framåt, adderar $90°$ till vinkeln i sinusuttrycket och ωL ger skalningen.

Vi behöver inte skriva om uttrycket, det ser redan ut som ohms lag där $j\omega L$ kallas komplexa impedansen och ersätter ersätter *R*. Även i detta fall kan ett visardiagram ritas.

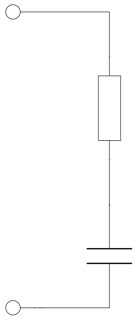


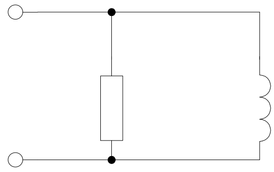
Visare för ström genom och spänning över en induktans

Visardiagrammet är vridet så att en av storheterna, i detta fall strömmen, sammanfaller med reella axeln. Vi säger att strömmen är riktfas. Anledningen till vridningen är att det är den inbördes relationen mellan visarna som är viktig och därför blir det enklast att låta en visare sammanfalla med reella axeln. Komplexa strömmen blir i detta fall rent reell.

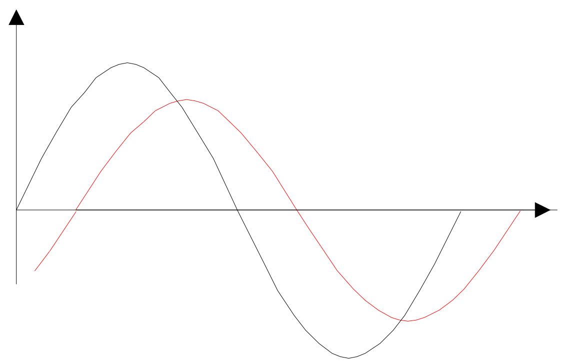
Elektroteknik MF1016 & MF1017 Föreläsning 3. Växelström

Växelströmsexempel på spänningslag och strömlag

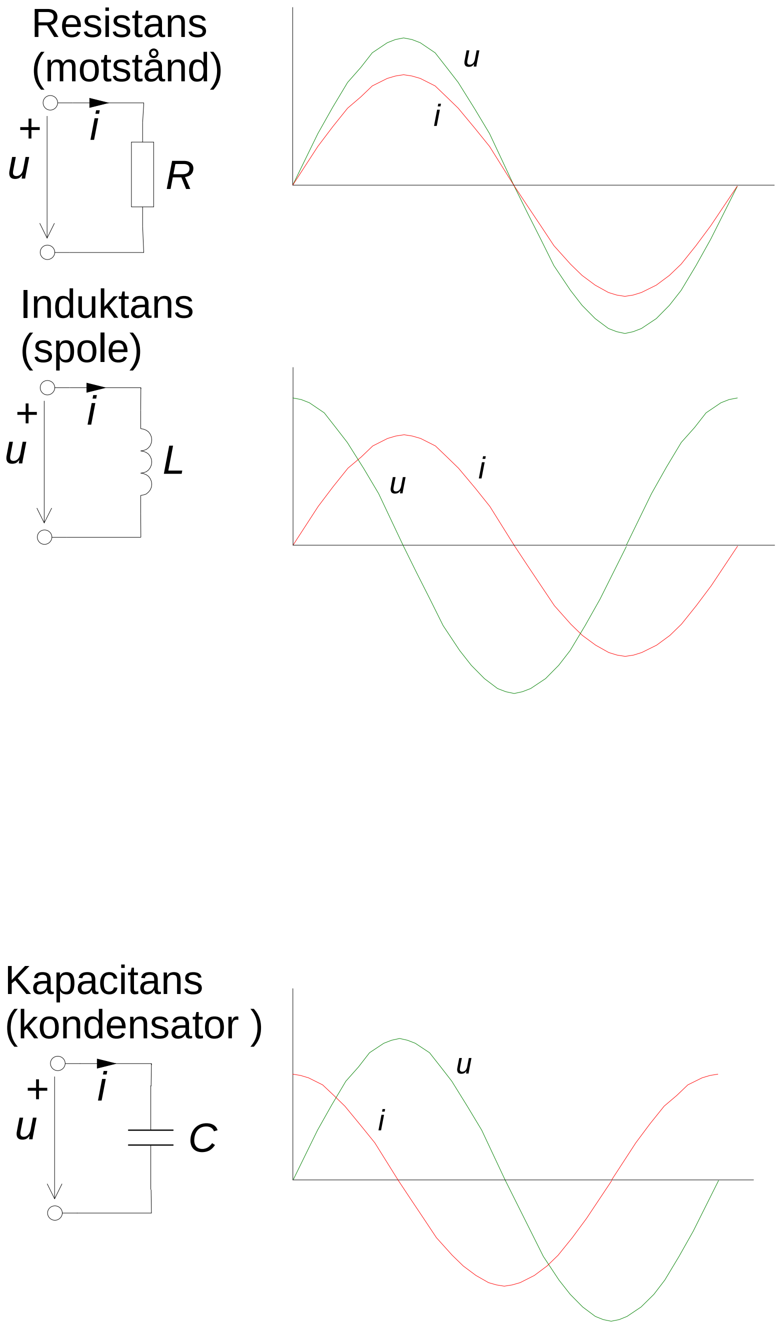


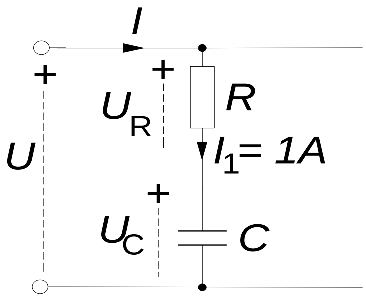


Sinusformade tidsstorheter som visare

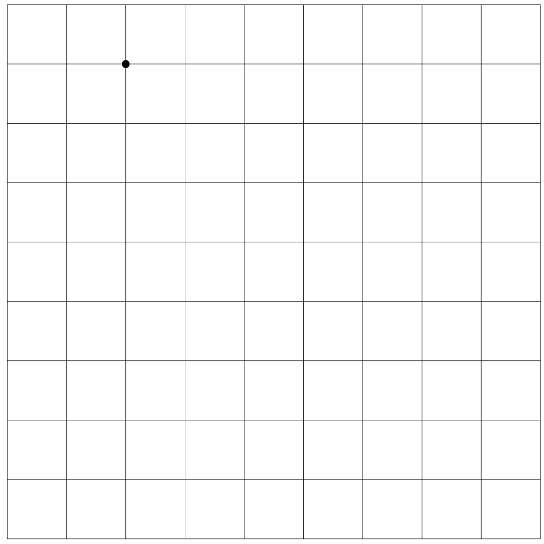


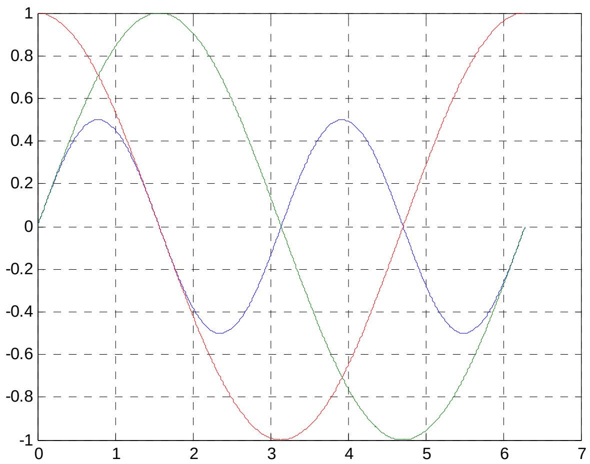
Kretselement

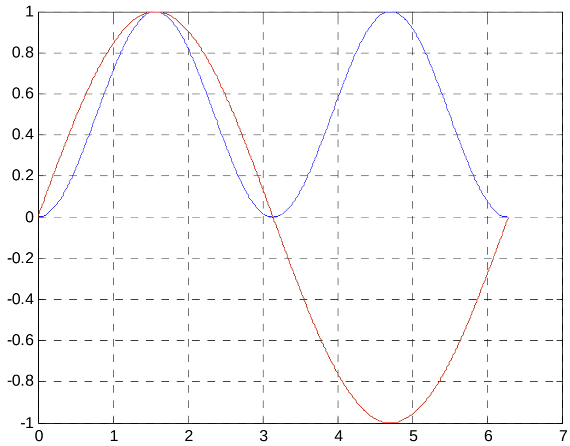


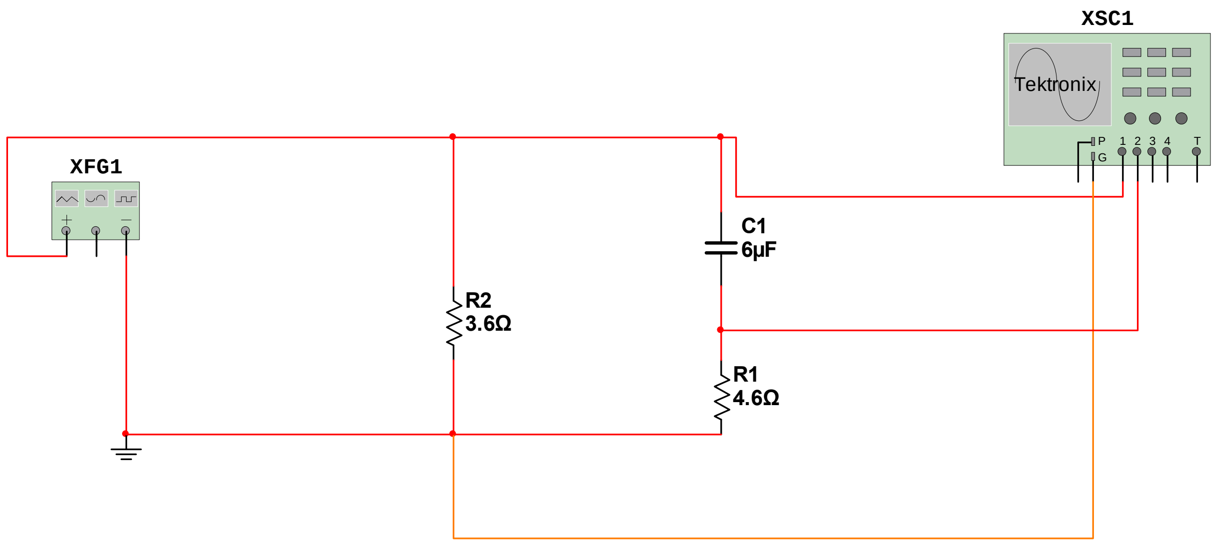


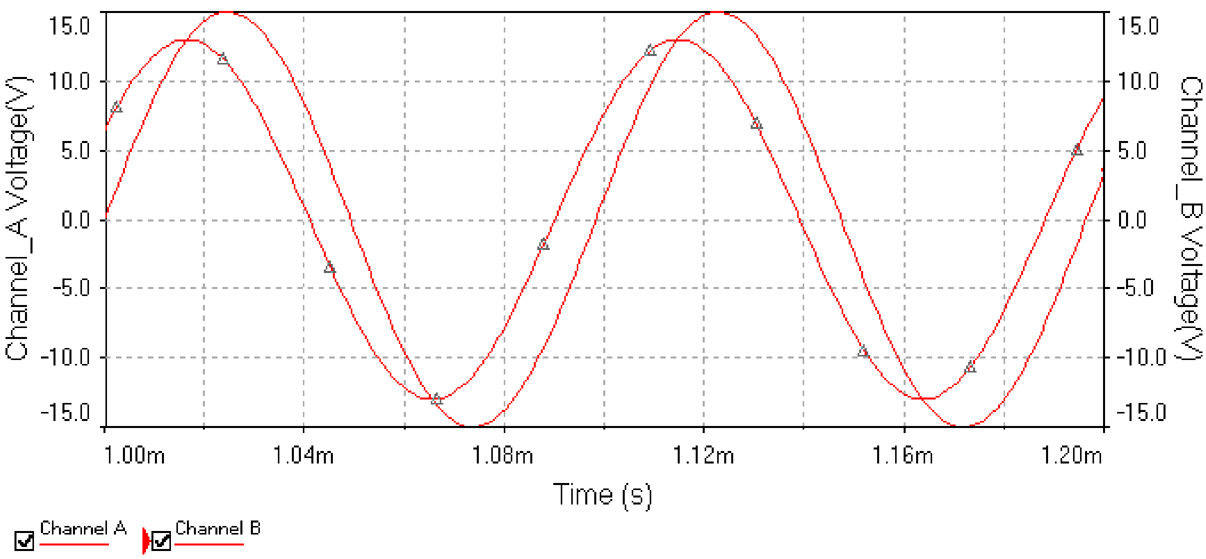
$$\frac{1}{\omega C} = R = 7\Omega$$

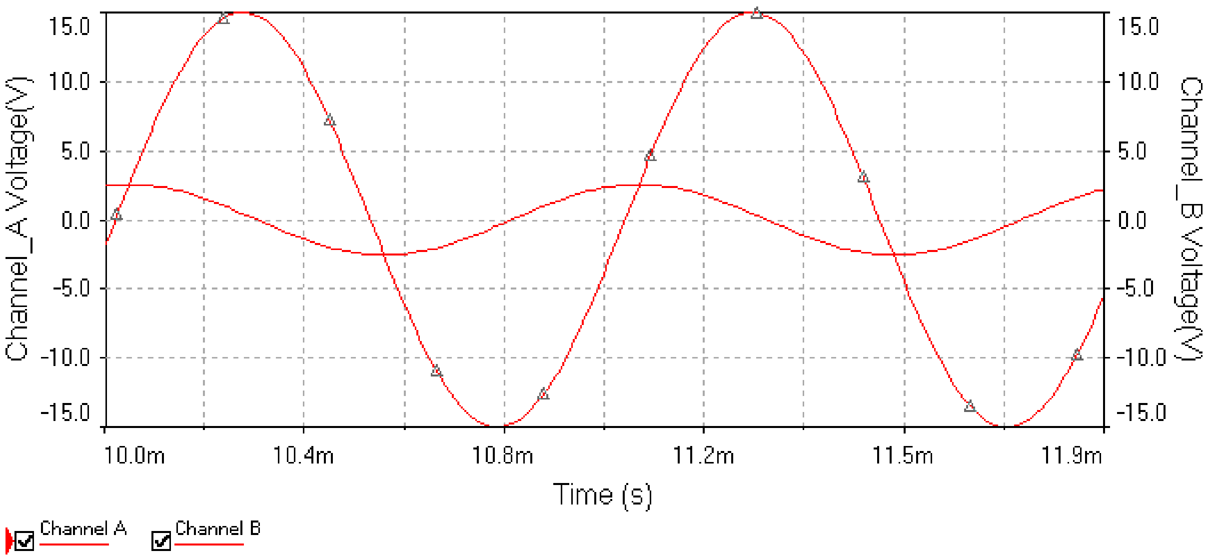



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


XSC1
Tektronix
XFG1
C1
6μF
R2
3.6Ω
R1
4.6Ω


Channel_A Voltage(V)
Channel_B Voltage(V)
1.00m
1.04m
1.08m
1.12m
1.16m
1.20m
Time (s)
Channel A
Channel B


Channel_A Voltage(V)
Channel_B Voltage(V)
10.0m
10.4m
10.8m
11.2m
11.5m
11.9m
Time (s)
Channel A
Channel B