

1.3.16 (sid. 36)

Lydelse: Bestäm allmänna ekvationen och vektorekvationen för planet som går genom punkterna $P(2, 2, 1)$, $Q(0, 3, 4)$ och $R(1, -1, -3)$

Lösning:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (0, 3, 4) - (2, 2, 1) = (-2, 1, 3) \\ \vec{PR} &= (1, -1, -3) - (2, 2, 1) = (-1, -3, -4) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{riktningsvektorer till} \\ \text{sökt plan} \end{array} \right\}$$

(Planet's vektorekvation: $r = r_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2$)

Om vi väljer P som den kända punkten i planet fås:

$$\underline{(x, y, z) = (2, 2, 1) + t_1(-2, 1, 3) + t_2(-1, -3, -4)}, \text{ planet's vektorekvation.}$$

Nu fås enkelt parameterekvationerna:

$$(I) \ x = 2 - 2t_1 - t_2, \quad (II) \ y = 2 + t_1 - 3t_2, \quad (III) \ z = 1 + 3t_1 - 4t_2$$

Då, ekvationssystemet:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2 - 2t_1 - t_2 \\ y = 2 + t_1 - 3t_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 2 - x \\ t_1 - 3t_2 = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{2 ggr 2-a eku} \\ \text{från första} \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 7t_2 = 2 - x - 2y + 4 \\ t_1 - 3t_2 = y - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7t_2 = 6 - x - 2y \\ t_1 = y - 2 + 3t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$7t_2 = 6 - x - 2y \Rightarrow t_2 = \frac{6}{7} - \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y$$

$$t_1 = y - 2 + 3t_2 = y - 2 + 3\left(\frac{6}{7} - \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y\right) =$$

$$= y - 2 + \frac{18}{7} - \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y = \frac{7}{7}y - \frac{14}{7} + \frac{18}{7} - \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y$$

Vi har fått: $t_1 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y$, $t_2 = \frac{6}{7} - \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y$

Insättning av t_1, t_2 i (III) $z = 1 + 3t_1 - 4t_2$ ger,

$$z = 1 + 3\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y\right) - 4\left(\frac{6}{7} - \frac{1}{7}x - \frac{2}{7}y\right)$$

$$7z = 7 + 3(4 - 3x + y) - 4(6 - x - 2y)$$

$$7z = 7 + 12 - 9x + 3y - 24 + 4x + 8y$$

$$7z = -5 - 5x + 11y$$

$$\underline{5x - 11y + 7z + 5 = 0}, \text{ planet's ekvation i allmän form}$$

Svar: Planet's ekvation i allmän är $5x - 11y + 7z + 5 = 0$

Dess vektorekvation är

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + t_1(-2, 1, 3) + t_2(-1, -3, -4)$$

OBS: Vektorekvationen kan förstås ha annat utseende beroende på hur de tre givna punkterna används för att beräkna riktningvektorer och vilken punkt som väljs som den kända.