



KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningförslag till kontrollskrivning 1
Tisdagen den 11 september, 2012

(1) Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$. Bestäm, om möjligt, en konstant A så att

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (4 \text{ p})$$

LÖSNINGSFÖRSLAG

Om $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$ så är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 + 3y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12y^2 - 8x^2}{(2x^2 + 3y^2)^2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{2x^2 + 3y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{12x^2 - 18y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{A(12y^2 - 8x^2) + 12x^2 - 18y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2} \\ &= \frac{(12 - 8A)x^2 + (12A - 18)y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2} \\ &= (12 - 8A) \frac{x^2 - \frac{3}{2}y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta blir identiskt lika med noll om $A = \frac{3}{2}$.

- (2) Temperaturen i ett område beskrivs av funktionen $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$ [$^{\circ}\text{C}$].
- a) I vilken riktning utifrån punkten $(1, 1, 1)$ ökar temperaturen som mest? **(2 p)**
- b) Hur snabbt ökar temperaturen, uttryckt i $^{\circ}\text{C}$ per sekund, för en partikel som rör sig med farten 1 längdenhet per sekund i den riktning som ges av vektorn $(2, 1, 2)$ utifrån punkten $(1, 1, 1)$? **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

- a) Temperaturen ökar som mest i den riktning som ges av gradienten av T . I denna uppgift har vi

$$\begin{aligned} \text{grad } T(1, 1, 1) &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \\ &= (2x + z^2, -2y, 2z + 2xz) \Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \\ &= (3, -2, 4). \end{aligned}$$

- b) För att bestämma riktningsderivatan i riktningen av $(2, 1, 2)$ normerar vi först denna vektor till

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$$

som har längd 1. Den sökta förändringshastigheten är lika med riktningsderivatan som är

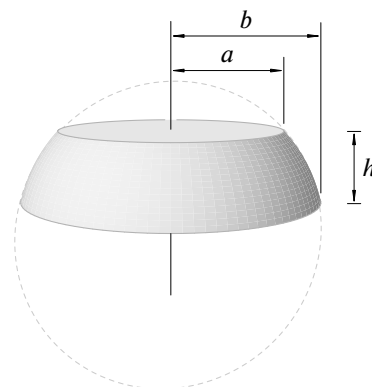
$$T'_{\hat{\mathbf{v}}}(1, 1, 1) = \text{grad } T(1, 1, 1) \cdot \hat{\mathbf{v}} = (3, -2, 4) \cdot \frac{1}{3}(2, 1, 2) = 4.$$

- (3) Volymen av en del av en sfär mellan två parallella plan ges av

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2),$$

där h är avståndet mellan planen, a och b är radierna för respektive skärningscirkel mellan sfären och planen.

- a) Bestäm en linjär approximation av $V(a, b, h)$ kring $(a, b, h) = (2, 6, 3)$. **(2 p)**



- b) Radierna a , b och höjden h mäts med noggrannheten

$$a = 2 \pm 0,1 \text{ m,}$$

$$b = 6 \pm 0,1 \text{ m,}$$

$$h = 3 \pm 0,2 \text{ m.}$$

Använd den linjära approximationen för att bestämma volymen med felgränser.

(2 p)

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Formeln för linjär approximation är

$$V(2 + \Delta a, 6 + \Delta b, 3 + \Delta h) = V(2, 6, 3) + \frac{\partial V}{\partial a}(2, 6, 3) \Delta a + \frac{\partial V}{\partial b}(2, 6, 3) \Delta b + \frac{\partial V}{\partial h}(2, 6, 3) \Delta h + \text{restterm},$$

där

$$V(2, 6, 3) = \frac{129\pi}{2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial a}(2, 6, 3) = \pi h a \Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = 6\pi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b}(2, 6, 3) = \pi h b \Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = 18\pi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}(2, 6, 3) = \frac{1}{6}\pi(3a^2 + 3b^2 + 3h^2) \Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = \frac{49\pi}{2}.$$

Vi får alltså

$$V(2 + \Delta a, 6 + \Delta b, 3 + \Delta h) = \frac{129\pi}{2} + 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \frac{49\pi}{2}\Delta h + \text{restterm}.$$

b) Givet är att

$$|\Delta a| \leq 0,1, \quad |\Delta b| \leq 0,1, \quad |\Delta h| \leq 0,2.$$

Om vi försummar resttermen i den linjära approximationen ger detta att

$$\begin{aligned} \left| V - \frac{129\pi}{2} \right| &\leq \left| 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \frac{49\pi}{2}\Delta h \right| \\ &\leq 6\pi|\Delta a| + 18\pi|\Delta b| + \frac{49\pi}{2}|\Delta h| \\ &\leq 6\pi \cdot 0,1 + 18\pi \cdot 0,1 + \frac{49\pi}{2} \cdot 0,2 \\ &= \frac{73\pi}{10}. \end{aligned}$$

Volymen uppskattas till

$$V = \frac{129\pi}{2} \pm \frac{73\pi}{10}.$$

Svar:

(1) $A = \frac{3}{2}$ (2) a) $(3, -1, 4)$ b) 4

(2) a) $V(2 + \Delta a, 6 + \Delta b, 3 + \Delta h) = \frac{129\pi}{2} + 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \frac{49\pi}{2}\Delta h + \text{restterm}.$

b) $V = \frac{129\pi}{2} \pm \frac{73\pi}{10}$