KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 1
Tisdagen den 11 september, 2012

(1) Betrakta funktionen $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$. Bestäm, om möjligt, en konstant A så att

$$A\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$ **(4 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

Om $f(x, y) = \ln(2x^2 + 3y^2)$ så är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 + 3y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12y^2 - 8x^2}{\left(2x^2 + 3y^2\right)^2}$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6y}{2x^2 + 3y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{12x^2 - 18y^2}{\left(2x^2 + 3y^2\right)^2}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{A(12y^2 - 8x^2) + 12x^2 - 18y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2} \\ &= \frac{(12 - 8A)x^2 + (12A - 18)y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2} \\ &= (12 - 8A)\frac{x^2 - \frac{3}{2}y^2}{(2x^2 + 3y^2)^2}. \end{aligned}$$

Detta blir identiskt lika med noll om $A = \frac{3}{2}$.

(2) Temperaturen i ett område beskrivs av funktionen $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$ [°C].

a) I vilken riktning utifrån punkten $(1, 1, 1)$ ökar temperaturen som mest? **(2 p)**

b) Hur snabbt ökar temperaturen, uttryckt i °C per sekund, för en partikel som rör sig med farten 1 längdenhet per sekund i den riktning som ges av vektorn $(2, 1, 2)$ utifrån punkten $(1, 1, 1)$? **(2 p)**

LÖSNINGSFÖRSLAG

a) Temperaturen ökar som mest i den riktning som ges av gradienten av T. I denna uppgift har vi

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} T(1,1,1) &= \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)\bigg|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \\ &= \left(2x + z^2, -2y, 2z + 2xz\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} \\ &= (3, -2, 4). \end{aligned}$$

b) För att bestämma riktningsderivatan i riktningen av $(2, 1, 2)$ normerar vi först denna vektor till

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \tfrac{1}{3}(2, 1, 2)$$

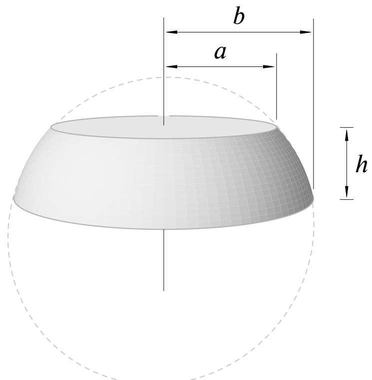
som har längd 1. Den sökta förändringshastigheten är lika med riktningsderivatan som är

$$T'_{\hat{\boldsymbol{v}}}(1,1,1) = \operatorname{grad} T(1,1,1) \cdot \hat{\boldsymbol{v}} = (3, -2, 4) \cdot \tfrac{1}{3}(2, 1, 2) = 4.$$

(3) Volymen av en del av en sfär mellan två parallella plan ges av

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h\left(3a^2 + 3b^2 + h^2\right),$$

där h är avståndet mellan planen, a och b är radierna för respektive skärningscirkel mellan sfären och planen.



a) Bestäm en linjär approximation av $V(a, b, h)$ kring $(a, b, h) = (2, 6, 3)$. **(2 p)**

b) Radierna a, b och höjden h mäts med noggrannheten

$$\begin{aligned} a &= 2 \pm 0{,}1 \text{ m}, \\ b &= 6 \pm 0{,}1 \text{ m}, \\ h &= 3 \pm 0{,}2 \text{ m}. \end{aligned}$$

Använd den linjära approximationen för att bestämma volymen med felgränser. **(2 p)**

a) Formeln för linjär approximation är

$$V(2+\Delta a, 6+\Delta b, 3+\Delta h) = V(2,6,3) + \frac{\partial V}{\partial a}(2,6,3)\,\Delta a + \frac{\partial V}{\partial b}(2,6,3)\,\Delta b + \frac{\partial V}{\partial h}(2,6,3)\,\Delta h + \text{restterm},$$

där

$$\begin{aligned}
V(2,6,3) &= \frac{129\pi}{2}, \\
\frac{\partial V}{\partial a}(2,6,3) &= \pi h a \,\Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = 6\pi, \\
\frac{\partial V}{\partial b}(2,6,3) &= \pi h b \,\Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = 18\pi, \\
\frac{\partial V}{\partial h}(2,6,3) &= \tfrac{1}{6}\pi\big(3a^2+3b^2+3h^2\big) \,\Big|_{(a,b,h)=(2,6,3)} = \frac{49\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vi får alltså

$$V(2+\Delta a, 6+\Delta b, 3+\Delta h) = \frac{129\pi}{2} + 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \frac{49\pi}{2}\Delta h + \text{restterm}.$$

b) Givet är att

$$|\Delta a| \le 0{,}1, \quad |\Delta b| \le 0{,}1, \quad |\Delta h| \le 0{,}2.$$

Om vi försummar resttermen i den linjära approximationen ger detta att

$$\begin{aligned}
\left| V - \frac{129\pi}{2} \right| &\le \left| 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \frac{49\pi}{2}\Delta h \right| \\
&\le 6\pi|\Delta a| + 18\pi|\Delta b| + \frac{49\pi}{2}|\Delta h| \\
&\le 6\pi \cdot 0{,}1 + 18\pi \cdot 0{,}1 + \frac{49\pi}{2} \cdot 0{,}2 \\
&= \frac{73\pi}{10}.
\end{aligned}$$

Volymen uppskattas till

$$V = \frac{129\pi}{2} \pm \frac{73\pi}{10}.$$

Svar:

(1) $A = \frac{3}{2}$ (2) a) $(3,-1,4)$ b) 4

(3) a) $V(2+\Delta a, 6+\Delta b, 3+\Delta h) = \dfrac{129\pi}{2} + 6\pi\Delta a + 18\pi\Delta b + \dfrac{49\pi}{2}\Delta h + \text{restterm}.$

b) $V = \dfrac{129\pi}{2} \pm \dfrac{73\pi}{10}$