

1. Vi löser systemet med gausseliminering,

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{array}$$

Väljer vi $t = x_3$ som parameter kan lösningen skrivas upp som

$$x_1 = -1 - 2t, \quad x_2 = 3 + t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1.$$

2. a) Subtrahera två gånger den andra raden från den tredje raden. Detta ger en rad med många nollor som vi kofaktorutvecklar längs,

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

I denna determinant subtraherar vi tre gånger andra raden från den tredje raden och får en rad som vi kofaktorutvecklar längs

$$\begin{aligned}
 &= 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{-3} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 7 \cdot (-5) \cdot 18 = -630.
 \end{aligned}$$

b) Vi ställer upp räkneschemat $(A|E)$ och radreducerar tills den vänstra halvan blir E . I den högra halvan kan vi då avläsa A^{-1} ,

$$\begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \ominus \\ \ominus \\ \ominus \end{array} \begin{array}{l} - \\ -4 \end{array} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Inversen är alltså $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Med räknereglerna får vi att

$$(A^{-1} + B)^T A^T = ((A^{-1})^T + B^T)A^T = (A^{-1})^T A^T + B^T A^T = (A^T)^{-1} A^T + B^T A^T = E + (AB)^T.$$

Stoppar vi in värdet på AB får vi att

$$(A^{-1} + B)^T A^T = E + (AB)^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$