KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till kontrollskrivning 2
Tisdagen den 25 september, 2012

1. Låt $D = \{(x, y) \colon 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$. Beräkna integralen

$$\iint_D e^{2(x^2+y^2)}\, dx\, dy. \qquad \textbf{(4 p)}$$

Lösningsförslag. I polära koordinater ges området av $D = \{(r, \theta) \colon 1 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Med ett variabelbyte blir integralen alltså

$$\begin{aligned}\iint_D e^{2(x^2+y^2)}\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^3 e^{2r^2} r\, dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4} e^{2r^2} \right]_1^3 d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\pi \left(e^{18} - e^2 \right).\end{aligned}$$

---

2. Bestäm lokala maxima och minima till funktionen $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ definierad i hela planet. **(4 p)**

Lösningsförslag. Lokala maxima och minima till $f(x, y)$ finns i punkter där gradienten av f är lika med nollvektorn. Alltså

$$(0, 0) = \operatorname{grad} f(x, y) = \left(4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x\right).$$

Detta ger att

$$\begin{cases} x^3 - y = 0, \\ y^3 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ x = 0 \text{ eller } x = \pm 1, \end{cases}$$

och därmed är $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (1, 1)$ och $(x, y) = (-1, -1)$ de stationära punkterna till funktionen f.

För att bestämma om dessa stationära punkter verkligen är lokala maxima eller minima beräknar vi andraderivatorna till funktionen,

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx} = 12x^2, \\ B &= f''_{xy} = -4, \\ C &= f''_{yy} = 12y^2. \end{aligned}$$

Taylorutveckling av f i de stationära punkterna har den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \tfrac{1}{2}Ah^2 + Bhk + \tfrac{1}{2}Ck^2$$

som ledande icke-konstant term.

För $(x,y) = (0,0)$ får vi

$$Q(h,k) = 0 - 4hk + 0 = -4hk.$$

Detta är en semi-definit form och kan alltså anta både positiva och negativa värden. Punkten $(0,0)$ är en sadelpunkt och inte ett lokalt maximum eller minimum.

För $(x,y) = \pm(1,1)$ har vi

$$Q(h,k) = 6h^2 - 4hk + 6k^2 = 6\big((h - \tfrac{1}{3}k)^2 + \tfrac{8}{9}k^2\big).$$

Detta uttryck är positivt definit, så punkterna $(x,y) = (1,1)$ och $(x,y) = (-1,-1)$ är båda lokala minimipunkter.

---

3. Vilket är det största värde som $f(x,y,z) = x + z^2$ antar på enhetssfären $\{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Enhetssfären ges av ekvationen $g(x,y,z) = 1$, där $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Eftersom både f och g är kontinuerligt deriverbara funktioner och $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ på enhetssfären så finns lokala maxima och minima för $f(x,y,z)$ på sfären bland punkter där $\operatorname{grad} f$ är parallell med $\operatorname{grad} g$. Detta är punkter med $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ för någon konstant λ. Vi har

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= (1, 0, 2z), \\ \operatorname{grad} g &= (2x, 2y, 2z), \end{aligned}$$

och ska alltså lösa systemet

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x, \\ 0 = 2\lambda y, \\ 2z = 2\lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Den andra ekvationen ger att $\lambda = 0$ eller $y = 0$. Alternativet $\lambda = 0$ är omöjligt på grund av första ekvationen, och alltså är $y = 0$. Tredje ekvationen $2z(\lambda - 1) = 0$ ger att $z = 0$ eller $\lambda = 1$. Om $z = 0$ får vi $x^2 = 1$ från sista ekvationen, eller

$$(x,y,z) = (\pm 1, 0, 0).$$

Om $\lambda = 1$ ger första ekvationen $x = \frac{1}{2}$, så sista ekvationen blir $\frac{1}{4} + z^2 = 1$, och

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Värdet av f i dessa punkter är

$$f(1, 0, 0) = 1,$$
$$f(-1, 0, 0) = -1,$$
$$f\left(\tfrac{1}{2}, 0, \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4}.$$

Det största värdet är alltså $f\left(\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{5}{4}$.

Svar:

1. $\frac{1}{2}\pi\left(e^{18} - e^2\right)$
2. Lokala minimipunkter i $(x, y) = \pm(1, 1)$
3. Det största värdet är $f\left(\frac{1}{2}, 0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{5}{4}$.