Hans Thunberg
KTH Matematik
SF1661 Perspektiv på Matematik HT12

Kompletterande uppgifter till Föreläsning 10

Funktionsbegreppet

(1) På sidorna 272 - 289 i *What is mathematics?* ges ett antal exempel på funktioner som har andra definitions- eller värdemängder än interval på reella axeln. Redogör för tre av dessa exempel.

Funktioner, ekvationer och grafer

Grafen till en ekvation $F(x, y) = 0$ definieras som mängden av alla talpar (x, y) för vilka ekvationen är uppfylld. Grafen till en ekvation är alltså detsamma som ekvationens lösningsmängd. Om vi inskränker oss till att tänka på reella lösningar är grafen en mängd punkter i det reella xy-planet. Till exempel består grafen till ekvationen $x^2 + y^2 = 1$ av alla punkter (x, y) i talplanet sådana att $x^2 + y^2 = 1$.

Grafen till en funktion $f(x)$ består av alla talpar $(a, f(a))$, där a tillhör f:s definitionsmängd. Om funktionen f har både en definitionsmängd och en värdemängd som är delmängder till de reella talen kan vi visualisera grafen i det två-dimensionella reella talplanet.

Kommentar. Definitionerna ovan gäller även om variablerna inte är reella tal. Till exempel består grafen till ekvationen $z^2 + w^2 = 1$, där z och w tillåts vara komplexa tal, av mängden av par av komplexa tal (z, w) som uppfyller ekvationen. Denna graf kan vi inte visualisera som vi är vana vid, grafen är en samling punkter i ett rum med fyra dimensioner.

I följande övnignsuppgifter är x och y reella tal.

(2) Skissera grafen till funktionen $f(x) = 2x - 1$. Denna graf är naturligtvis identisk med grafen till ekvationen $2x - y - 1 = 0$.
(3) Skissera grafen till funktionen $f(x) = x^2$. Ange också en ekvation som har samma graf som funktionen f.
(4) Är det sant att varje funktionsgraf också kan ses som grafen till en ekvation?
(5) Skissera grafen till ekvationen $x^2 + 2y^2 = 1$.
(6) Är det sant att varje ekvationsgraf också kan ses som en funktionsgraf?

Observera att man glider i betydelse mellan *grafen till en ekvation* och *grafen till en funktion*, skrivsättet $y = f(x)$ är ett exempel på detta. Av övningsuppgifterna ovan framgår att det ofta är naturligt att göra så, men också att det i andra sammanhang är viktigt att skilja på dessa två begrepp.

Inverterbarhet

(4) Visa att en linjär funktion $f(x) = kx+m$ är inverterbar om och endast om $k \neq 0$. Bestäm också ett uttryck för inversfunktionen f^{-1}. Verifiera att $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ och att $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

(5) a) För vilka positiva heltal n är funktionen $f(x) = x^n$ inverterbar på hela $\mathbb{R}$? Vilken är då dess invers?

b) För vilka reella tal r är funktionen $f(x) = x^r$ inverterbar på intervallet $(0, \infty)$ (dvs $0 < x < \infty$)? Vilken är då dess invers? Ge exempel!

(6) a) Visa att ekvationen $\sqrt[3]{x-2} = c$ har precis en lösning för varje värde på högerledet c. Vi kan också formulera det som att grafen $y = \sqrt[3]{x-2}$ skär varje linje $y = c$ i precis en punkt.

b) Visa att funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ är inverterbar på hela reella axeln $\mathbb{R}$, och bestäm dess invers. Ange också definitionsmängd till f och f^{-1}.

c) Hur blir det om du istället betraktar ekvationer $\sqrt{x-2} = c$ och funktionen $f(x) = \sqrt{x-2}$?

d) Ekvationen $\sin x = c$ har antingen oändligt många lösningar (om $|c| \leq 1$) eller inga lösningar alls (om $|c| > 1$). (Rita figur!)
Ange det största intervall I som innehåller origo och som är sådant att funktionen $f(x) = \sin x$ är inverterbar på definitionsmängden I. Vad blir då inversens definitionsmängd? Skissera grafen $y = f^{-1}(x)$. (Denna funktion f^{-1} som du nu har skisserat grafen till kallas arcussinus x och betecknas $\arcsin x$ eller $\sin^{-1} x$.)

f) Formulera ett generellt påstående som som kopplar ihop lösbarheten av ekvationen $f(x) = c$ och inverterbarheten hos funktionen f. (För att att få detta precist och logiskt vattentätt krävs det bl a att man i påståendet beaktar defintionsmängd och värdemängd för funktionen f.)

Implikation eller ekvivalens vid ekvationslösning

När vi löser ekvationer skriver vid ofta om en given ekvation till en ny ekvation genom att tillämpa samma operation på högerled och vänsterled (addera samma sak till bägge led, kvadrera bägge led etc). Med andra ord skriver vi om ekvationen genom att applicera en viss funktion på bägge led. Symboliskt kan vi skriva det som att ekvationen

$$p(x) = q(x) \qquad \text{(Ekvation 1)}$$

omformas genom att applicera en funktion F till bägge led, vilket leder till en ny ekvation

$$F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right) \qquad \text{(Ekvation 2)}$$

(7) Förklara varför man inte kan förlora några lösningar genom att applicera en och samma funktion till bägge led.
(8) Visa att Ekvation 1 och Ekvation 2 har samma lösningar om funktionen F är inverterbar.

I så fall kan vi skriva

$$p(x) = q(x) \iff F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right).$$

där ekvivalenspilen($\iff$) uttrycker att påståendet $p(x) = q(x)$ är sant om och endast om påståendet $F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right)$ är sant, dvs att de två ekvationerna har samma lösningar.

Om funktionen F inte är inverterbar kan det tillkomma lösningar, s k falska lösningar, när vi applicerar F till bägge led, vilket framgår av följande exempel,

(9) Vid lösning av ekvationen $\sqrt{x+2} = x$ börjar vi med att kvadrera bägge led, dvs vi applicerar den icke inverterbara funktionen $F(t) = t^2$ på bägge led. Visa att det tillkommer en falsk lösning vid kvadreringen.

Om F inte är inverterbar måste vi alltså skriva

$$p(x) = q(x) \implies F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right) \quad (\text{t ex } \sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2\ )$$

med implikationspil ($\implies$), som säger att om påståendet $p(x) = q(x)$ är sant så är också påståendet $F\left(p(x)\right) = F\left(q(x)\right)$ sant, dvs att varje x som löser den första ekvationen också löser den andra ekvationen, men att omvändningen inte säkert är sann, det kan finns lösningar till den andra ekvationen som inte löser den första. Följaktligen är det logiskt nödvändigt att avsluta med prövning för att se vilka av lösningarna som också löser den första ekvationen.