

### Workshops om derivata och integral, övning 18 och 19

- (1) Förklara, utan att beräkna integralerna, varför det gäller att

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \quad \text{och} \quad \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0$$

- (2) Lös övning 10, sidan 27, i Gottliebs *Funktionslära*. Vilken integral är det du approximerar i denna uppgift?
- (3) a) Vad kan man säga om funktionen  $f(x)$  och dess graf  $y = f(x)$  om derivatan  $f'(x) > 0$ , respektive om  $f'(x) < 0$ , för alla  $x$  i ett visst intervall?
- b) Vad kan man säga ifall andraderivatan  $f''(x)$  (dvs derivatans derivata) är positiv i ett intervall? Om den är negativ? Hur ser grafen ut i den punkt där andraderivatan byter tecken? En sådan punkt kallas en *inflektionspunkt* till  $f$ .
- c) Exemplifiera med några funktioner t ex  $f(x) = x^2$  och  $g(x) = x^3$ .

- (4) a) Bestäm tangentlinjen  $y = L(x) = ax + b$  till funktionen  $f(x) = x^2$  i punkten  $(1, 1)$ . Rita sedan i samma figur tangentlinjen  $y = L(x)$  och funktionsgrafen  $y = f(x)$  i ett intervall kring punkten  $x = 1$ , t ex över intervallet  $0 \leq x \leq 2$ .
- b) Verifiera att tangentlinjen också kan bestämmas med hjälp av formeln  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (där  $x_0 = 1$  i detta fall).
- c) Övertyga dig själv, genom att studera figuren, om att funktionsvärdet  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  för  $x$  nära  $x_0 (= 1)$ , och att approximationen blir bättre ju mindre  $|x - x_0|$  är (dvs ju närmare  $x$  ligger  $x_0$ ).
- d) Beräkna med hjälp av den linjära approximationen approximativa värden på  $(0.98)^2$  och  $(1.01)^2$ .

KOMMENTAR: Formeln för linjär approximation kan också skrivas på den mer kortfattade formen

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Delta x,$$

där  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ ,  $\frac{df}{dx} = f'(x_0)$  och  $\Delta x = (x - x_0)$ .

V G Vänd!

- (5) Bestäm ett approximativt värde till  $\sqrt[3]{7.9}$  genom linjär approximation av funktionen  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  kring lämplig punkt .
- (6) Summan  $\sum_{k=1}^{100} k^4$  kan tolkas som en summa av areor hos 100 rektanglar med basen 1 och höjder  $1^4, 2^4, \dots, 100^4$  .

Visa med lämplig figur att

$$\int_0^{100} x^4 dx < \sum_{k=1}^{100} k^4 < \int_0^{100} (x+1)^4 dx$$

och visa sedan genom att beräkna integralerna och göra lämplig uppskattningar att att summans värde uppfyller

$$2 \cdot 10^9 < \sum_{k=1}^{100} k^4 < 3 \cdot 10^9.$$

Sensmoral: Knepiga summor kan ibland approximeras med enkla integraler.

- (7) Under vissa förhållanden gäller att ljudets utbredningshastighet  $v$  [m/s] i luft beror på temperaturen  $T$  [K] enligt formeln

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

där  $v_0$  är utbredningshastigheten vid en referenstemperatur  $T_0$ . Man vill beräkna utbredningshastigheten  $v$  med hjälp av denna formel och mäter upp lufttemperaturen  $300^\circ \text{ K}$  . Uppskatta det relativa felet i utbredningshastighet som uppstår om termaturmätningen har ett absolut mätfel om  $3^\circ \text{ K}$ .

**Kommentar.** Om den uppmätta temeperaturen är  $T_u$  och den sanna temeperaturen är  $T_s$  ges det relativa felet i  $v$  av

$$\frac{|v(T_s) - v(T_u)|}{|v(T_u)|}.$$

Täljaren  $|v(T_s) - v(T_u)|$  kallas det absoluta felet i  $v$ .

- (8) En cylinder är 10 dm hög och har ett cirkulärt tvärsnitt med radien 2 dm. Densiteten  $\rho$  hos cylindern variera med höjden enligt formeln  $\rho(h) = 240 - 2h^2$  [g/dm<sup>3</sup>]. Härled en integralformel för cylinderns massa och beräkna massan.

*V G Vänd!*

- (9) Formulera differential- och integralkalkylens huvudsats (The fundamental theorem of calculus) och redogör för dess bevis, se **WIM** sid. 436 – 439.
- (10) På sidan 438 i **WIM** förs en matematikdidaktisk diskussion om hur integralbegreppet ibland introduceras. Hur introducerades begreppet när du läste om det i gymnasiet? Vilka för- och nackdelar ser du mer att introducera begreppet öbestämd integral” innan den bestämda integralen introduceras?

SVAR TILL VALDA UPPGIFTER:

(2) Vid indelning i  $n$  delintervall fås ett approximativt värde på  $\int_0^1 2^x dx$  (dvs den sökta arean) som ges av en geometrisk summa med första term  $\frac{1}{n}2^{1/n}$  och kvot  $2^{1/n}$ , med summa  $\frac{1}{n} \frac{2^{1/n} - 1}{2^{1/n} - 1}$  som för stora värden på  $n$  är  $\approx 1.44$ .

(4) Tangentlinjen ges av  $y = 1 + 2(x - 1) \iff y = 2x - 1$ . Linjär approximation kring  $x_0 = 1$  ger  $0.98^2 \approx 0.96$  och  $1.01^2 = 1.02$ .

$$(5) \sqrt[3]{7.9} \approx \frac{239}{120} \approx 1.992 \quad (7) 1/200$$