



KTH Teknikvetenskap

ENVARIABELANALYS

TOMAS EKHOLM

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK

Innehåll

1 Att läsa innan vi börjar	4
1.1 Varför läsa matematik?	4
1.2 Definitioner, satser och bevis	4
1.3 Mängder	4
1.4 Lite historik om mängder	6
2 Delmängder av reella tal	7
2.1 Intervall	7
2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal	7
3 Funktioner	9
3.1 Inverser och inverterbarhet	10
3.2 Egenskaper för reella funktioner	12
3.3 Trigonometriska funktioner	13
3.4 Cyklometriska funktioner	18
3.5 Exponentialfunktionen	20
3.6 Logaritmfunktionen	20
3.7 Absolutbelopp	21
3.8 Övningar	22
4 Talföljder	23
4.1 Definitionen och konvergens	23
4.2 Binomialsatsen	26
4.3 Talet e	28
4.4 Standardgränsvärden	31
4.5 Bolzano-Weierstrass sats	31
5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten	33
5.1 Övningar	35
6 Lokala gränsvärden	36
7 Kontinuitet	40
7.1 Definitionen och exempel	40
7.2 Satser om kontinuerliga funktioner	42

8	Derivata	45
8.1	Definitionen	45
8.2	Derivatans av elementära funktioner	45
8.3	Derivationsregler	46
8.4	Definitioner av lokala max- och minpunkter	49
8.5	Medelvärdesatsen	50
9	Integralen	52
9.1	Introduktion	52
9.2	Definitionen	53
10	Integrerbarhet	61
11	Rotationsintegraler	67
12	Generaliserade integraler	69
13	Binomialsatsen	73

1 Att läsa innan vi börjar

1.1 Varför läsa matematik?

Matematisk teori är ett ypperligt tillfälle att lära sig att analysera, resonera, argumentera, strukturera och ordna. Matematik bygger på abstraktion och den som lär sig att lätt ta till sig abstraktion besitter en enorm styrka i analytiska sammanhang.

Här följer en lista med intressanta länkar för den som läser denna text elektroniskt:

- Matematik vägen till finansbranschen

1.2 Definitioner, satser och bevis

Matematik struktureras i huvudsak med hjälp av definitioner, satser och bevis. En **definition** är ett införande av ett begrepp. Följande är ett exempel på en definition

Definition 1.1. Ett heltal a är **jämnt** om det finns ett heltal b sådant att $a = 2b$.

En sats är ett påstående och ett bevis av en sats är ett logiskt stärkt resonemang som visar att satsen är sann. Exempelvis

Sats 1.2. *Produkten av två jämna tal är ett jämnt tal.*

BEVIS: Låt a_1 och a_2 vara två jämna tal, d.v.s. enligt definitionen finns det tal b_1 och b_2 sådana att $a_1 = 2b_1$ och $a_2 = 2b_2$. Produkten kan skrivas som

$$a_1 a_2 = (2b_1)(2b_2) = 4b_1 b_2 = 2c,$$

där $c = 2b_1 b_2$. Eftersom c är ett heltal är produkten enligt definitionen ett jämnt tal. ■

1.3 Mängder

Låt oss börja med att titta på ett av de mest grundläggande begreppen i matematiken, nämligen mängder. En **mängd** är en samling objekt, som till exempel tal, och dessa objekt kallar vi för **element** i mängden. Det enklaste sättet att beskriva en mängd är att räkna upp dess element. Vi använder oss då av en kommaseparerad uppräkningslista av elementen innanför symbolerna $\{\}$. Ett sådant exempel är mängden

$$A = \{1, 3, a, 7, Pelle\}.$$

Detta betyder att A är en mängd som innehåller elementen $1, 3, a, 7$ och $Pelle$. Vi säger att A är mängden av $1, 3, a, 7$ och $Pelle$.

Om A är en mängd och x är ett element i mängden A så skriver vi $x \in A$ och säger att x **tillhör** A . Exempelvis gäller att $3 \in \{1, 3, 7\}$ och $b \in \{a, b, 10, 3\}$. Att ett element x inte tillhör mängden A skrivs $x \notin A$. Den **tomma mängden** innehåller ingenting och betecknas \emptyset .

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att skriva $\{x \in D : \text{villkor på } x\}$. Med detta menar man mängden av alla element i D som uppfyller de givna villkoren. Vi tar oss även friheten att utelämna mängden D om den är given utifrån villkoren på x . Som exempel tar vi

$$B = \{n \in \{1, 2, 3, \dots\} : n \text{ är udda}\} = \{n : n \text{ är ett positivt udda heltal}\}$$

och

$$C = \{y \in \{1, 2, 3, 4\} : y > 2\}.$$

Mängden B innehåller alla udda positiva heltal, medan C innehåller alla element från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ som är större än 2. Alltså har vi

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} \quad \text{och} \quad C = \{3, 4\}.$$

Exempel 1.3. Låt $A = \{4, 5, 8, 4711, 12, 18\}$ och $B = \{x \in A : x > 10\}$. Då är $B = \{12, 18, 4711\}$ medan $\{x \in A : x < 3\} = \emptyset$. Vidare har vi att $4 \in A$ och $4 \notin B$. ▲

Vi bryr oss inte om i vilken ordning eller hur många gånger elementen räknas upp och därmed gäller till exempel

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{3, 1, 4, 2\} = \{1, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 3, 2, 4\}.$$

Vi använder även notationen $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ för att säga att $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_n \in A$.

Definition 1.4. Låt A och B vara mängder. Om alla element i mängden A också är element i mängden B så sägs A vara en **delmängd** till B . Detta betecknas $A \subseteq B$.

Exempel 1.5. Mängden $\{1, a\}$ är en delmängd till $\{1, 3, a\}$, eftersom alla element i $\{1, a\}$ finns i mängden $\{1, 3, a\}$. Vi skriver $\{1, a\} \subseteq \{1, 3, a\}$. ▲

Definition 1.6. Antag att A och B är mängder. **Unionen** av A och B består av de element som ligger i någon av mängderna och betecknas $A \cup B$. **Snittet** av A och B består av de element som ligger i båda mängderna och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.7. Låt $A = \{1, 3, 5, 6\}$ och $B = \{5, 3, 4711\}$. Då har vi $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 4711\}$ och $A \cap B = \{3, 5\}$. ▲

Det är dags att titta på några viktiga talmängder. Den mängd vi använder för att räkna föremål är de **naturliga talen**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Tar vi med negativa tal får vi **heltalen**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Beteckningen kommer från tyskans *zahl* som betyder tal. Bråken eller de **rationella talen**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Här kommer beteckningen från engelskans *quotient*. Slutligen betecknar vi med \mathbb{R} de **reella talen**. De reella talen kan ses som mängden av alla tal på tallinjen, exempelvis $0, -1, 3/2, -527/3, \sqrt{2}$ och π . Det ligger utanför ramarna för detta häfte att göra en stringent definition av dessa tal. Vi betecknar med

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i \text{ är den imaginära enheten}\}$$

de **komplexa talen**. Notera att $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Exempel 1.8. Vi har att $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$. ▲

Exempel 1.9. Mängden $\{n \in \mathbb{Z} : n = 2k \text{ för något } k \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av alla jämna heltal. Denna mängd kan också skrivas som $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, eller som $\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$. ▲

Exempel 1.10. Låt oss påpeka att en mängd även kan ha andra mängder bland dess element. Exempelvis kan vi låta

$$A = \{2, 3, \{-1, 1\}, 4\},$$

och vi har att $\{-1, 1\} \in A$, det vill säga mängden $\{-1, 1\}$ är ett element i mängden A . Observera att $-1 \notin A$. ▲

Låt A vara en mängd. För att ta bort element ur A används symbolen \setminus . Vi definierar $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Exempelvis är $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mängden av alla reella tal utom 0 och 1.

1.4 Lite historik om mängder

Det är inte helt enkelt att beskriva mängdlära. Georg Cantor var den som mellan 1874 till 1884 påbörjade det som vi idag kallar mängdlära. År 1901 visade Bertrand Russell att Cantor's beskrivning av mängdläran innehöll orimligheter. Han visade det som vi nu kallar Russell's paradox. 1908 föreslog Ernst Zermelo en axiomatisk uppbyggd mängdlära som håller än idag.

2 Delmängder av reella tal

2.1 Intervall

Låt a och b vara reella tal. Följande mängder kallas **intervall**

- a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,
- b) $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,
- c) $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$,
- d) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,
- e) $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$,
- f) $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$,
- g) $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$,
- h) $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$,
- i) $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

Här står tecknet $:=$ för att vänsterledet är definierat som högerledet. Talen a och b kallas **ändpunkter** eller **randpunkter** till intervallet. Vi använder symbolen $[$ om a tillhör intervallet och $($ om a inte tillhör intervallet. Om båda randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **slutet**. Om inga av randpunkterna tillhör intervallet kallas intervallet **öppet**.

Exempel 2.1. Intervallen $(1, 5)$, $(-\infty, 4)$, $(-3, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är öppna intervall eftersom alla randpunkter till intervallen ej tillhör intervallen. Intervallen $[1, 4]$, $[-2, \infty)$ och $(-\infty, \infty)$ är slutna för alla randpunkter till intervallen även tillhör intervallen. Intervallet $[2, 3)$ är varken öppet eller slutet. Läsaren har säkert noterat att intervallet $(-\infty, \infty)$ både är öppet och slutet, eftersom det inte finns några randpunkter. ▲

2.2 Egenskaper för delmängder av reella tal

En **omgivning** till en punkt $a \in \mathbb{R}$ är ett öppet intervall som innehåller a . Exempelvis är det öppna intervallet $(0, 1)$ en omgivning till talet $3/4$ och intervallen $(-1/n, 1/n)$ för $n > 0$ är alla omgivningar till 0. En **punkterad omgivning** till en punkt a är en omgivning till a där vi har tagit bort talet a .

Exempel 2.2. Mängden $\{x \in (-1, 2) : x \neq 0\} = (-1, 0) \cup (0, 2)$ är en punkterad omgivning till 0. ▲

Definition 2.3. Ett tal m sägs vara en **övre begränsning** till en mängd A om $x \leq m$ för varje $x \in A$. En mängd som har en övre begränsning kallas **uppåt begränsad**, annars **uppåt obegränsad**.

Undre begränsning till en mängd, en **nedåt begränsad** mängd och en **nedåt obegränsad** mängd definieras på ett analogt sätt. En mängd som är uppåt begränsad och nedåt begränsad sägs vara **begränsad**, annars **obegränsad**. Ett exempel på en obegränsad mängd är intervallet $[2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$ som är uppåt obegränsad och nedåt begränsad.

Ett grundläggande axiom för de reella talen är

Axiom 2.4 (Supremumaxiomet). Varje uppåt begränsad delmängd av de reella talen har en minsta övre begränsning.

Definition 2.5. Ett tal m sägs vara **supremum** till en mängd A och betecknas $\sup A$ om m är den minsta övre begränsningen till A .

På samma vis definieras **infimum** av en mängd A som den största undre begränsningen till A och betecknas $\inf A$.

Supremumaxiomet säger med andra ord att om A är en mängd av reella tal som är uppåt begränsad så finns talet $\sup A$.

Exempel 2.6. Låt

$$A = \left\{ \frac{4n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Visa att $\sup A = 4$. För att se att 4 är en övre begränsning till A räcker det med att notera att för en godtycklig punkt i A gäller att

$$a_n := \frac{4n}{n+1} \leq \frac{4n}{n} = 4.$$

Nu måste vi visa att 4 är den minsta övre begränsningen, dvs att det inte finns någon mindre övre begränsning. Låt oss anta att $K < 4$ är en övre begränsning och försöka finna en motsägelse. Polynomdivision ger

$$\frac{4n}{n+1} = 4 - \frac{4}{n+1}.$$

För att få en motsägelse vill vi finna ett n sådant att $a_n > k$, vilket skulle motsäga att K är en övre begränsning. Alltså, kan vi finna ett n sådant att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K?$$

Vi noterar att

$$4 - \frac{4}{n+1} > K \Leftrightarrow 4 - K > \frac{4}{n+1} \Leftrightarrow n+1 > \frac{4}{4-K} \Leftrightarrow n > \frac{4}{4-K} - 1.$$

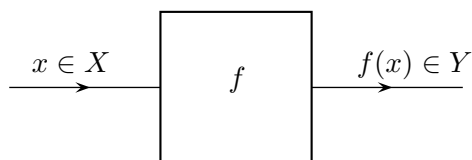
Det är klart att vi kan välja $n > 4/(4-K) - 1$ och alltså få $a_n > K$. Vi har fått en motsägelse och alltså är 4 den minsta övre begränsningen. \blacktriangle

3 Funktioner

Innan vi gör en allmän definition av vad en funktion är kan det vara på sin plats att titta på något välbekant, nämligen en formel som $f(x) = x^2 + 1$, för $x > 0$. Formeln säger att om vi tar ett tal $x > 0$ så får vi ett nytt tal $f(x) \in \mathbb{R}$ genom att göra beräkningen $x^2 + 1$; till exempel får vi $f(2) = 2^2 + 1 = 5$. Vi säger att f är en funktion från de positiva reella talen till de reella talen, eftersom det vi stoppar in, x , är ett positivt reellt tal och det vi får ut, $f(x)$, är ett reellt tal. Vi betecknar detta med $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nu till den allmänna definitionen.

Definition 3.1. Låt X och Y vara mängder. En **funktion** $f: X \rightarrow Y$ är ett sätt att till varje element $a \in X$ tilldela ett välbestämt element $b \in Y$. Vi skriver $f(a) = b$. Vi säger att a **avbildas** på b och att b är **bilden** av a . Mängderna X och Y kallas **definitionsområde** respektive **målmängd**.

Kommentar 3.2. Beteckningen $f: X \rightarrow Y$ utläses: f är en funktion från X till Y . Ett vanligt alternativ till ordet funktion är **avbildning**. Vi kan se funktionen som ett eget objekt som utför en handling som bilden nedan visar.



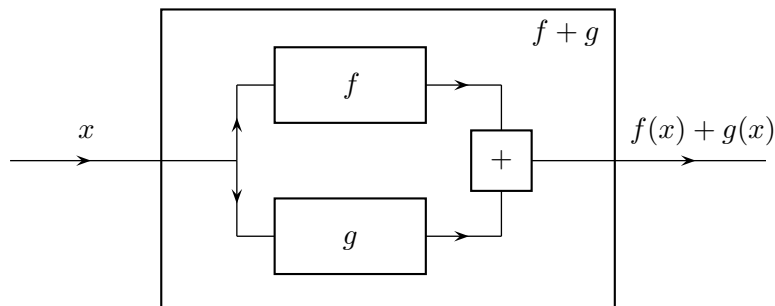
Exempel 3.3. Låt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sådan att $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^x$. ▲

Om inget anges om definitionsområdet antas funktionen vara definierad på så stor delmängd av de reella talen som möjligt och målmängd antas alltid vara \mathbb{R} . Detta är en konvention mellan er som läsare och oss som skribenter. Vi kommer tydligt skilja på f och $f(x)$, det första är funktionen f , medan det andra är funktionens värde i punkten x . Som ett exempel på denna notation så definierar vi summan och produkten av två reellvärda funktioner f och g , sådana att $D_f = D_g \subset \mathbb{R}$ enligt

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

Bildmässigt kan vi se additionen som



Om vi inte vill namnge den funktion som vi arbetar med eller introducerar används notationen $x \mapsto 1 + x^2$ istället för $f(x) = 1 + x^2$.¹

Värdemängden till en funktion $f: X \rightarrow Y$ definieras som

$$V_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ för något } x \in X\}.$$

Exempel 3.4. Betrakta mängderna $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2, \dots, 100\}$. Ett exempel på funktion $f: A \rightarrow B$ ges av $f(n) = 2n$ för $n \in A$. Vi har alltså att $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ och $f(3) = 6$. Per definition måste vi ha $f(x) \in B$ för alla $x \in A$, och detta gäller ju här eftersom

$$f(1) = 2 \in B, \quad f(2) = 4 \in B, \quad \text{och} \quad f(3) = 6 \in B.$$

I detta exempel definieras funktionen f av formeln $f(n) = 2n$, men det är inte alls nödvändigt att det finns en formel som beskriver hur funktionen verkar. Om vi som här har en funktion från den *ändliga* mängden $A = \{1, 2, 3\}$ kan man till exempel definiera funktionen med hjälp av en tabell:

n	$f(n)$
1	2
2	4
3	6

▲

Exempel 3.5. Låt $h(x) = 3/2 \cdot x^2 - x^3$. Detta definierar en funktion h från \mathbb{R} till \mathbb{R} . Vi har exempelvis att

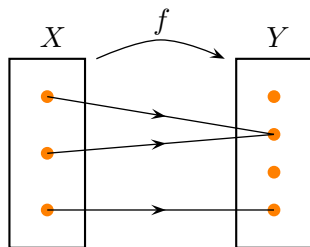
$$h(1) = \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad h(-2) = 14.$$

▲

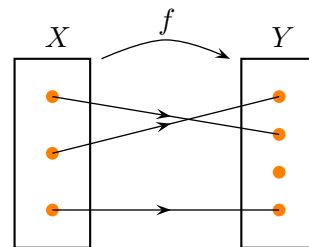
3.1 Inverser och inverterbarhet

Definition 3.6. En funktion $f: X \rightarrow Y$ säges vara **injektiv** om det för varje $x, y \in X$ gäller att om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$.

Uttryckt i ord säger den här definitionen att funktionen aldrig skickar två olika element i X på samma element i Y .



Exempel då f ej är injektiv

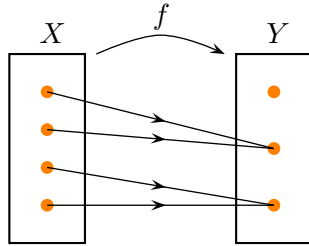


Exempel då f är injektiv

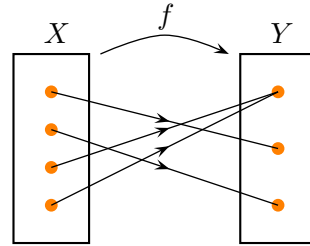
¹För er som uppskattar programmering är det väldigt likt det sätt som anonyma klasser eller funktioner definieras i olika programspråk.

Definition 3.7. En funktion $f: X \rightarrow Y$ säges vara **surjektiv** om det för varje $y \in Y$ existerar ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$.

Varje element i Y är alltså bilden av något x under funktionen f om funktionen är surjektiv. En funktion är surjektiv om och endast om dess målmängd sammanfaller med dess värdemängd.



Exempel då f ej är surjektiv



Exempel då f är surjektiv

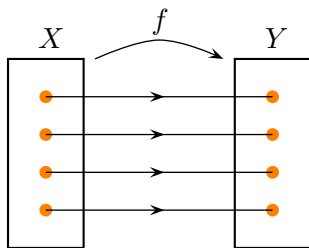
En funktion kan vara surjektiv utan att vara injektiv, och tvärtom.

Exempel 3.8. Låt \mathbb{R}_+ beteckna de icke-negativa reella talen. Betrakta funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ som definieras av $f(x) = x^2$. Då är f surjektiv, men inte injektiv — till exempel har vi $f(-2) = f(2) = 4$.

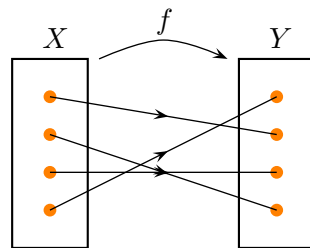
Ett exempel på en funktion som är injektiv men inte surjektiv ges av funktionen i 3.4. Det finns till exempel inget $n \in \{1, 2, 3\}$ sådant att $f(n) = 3$.



Definition 3.9. En funktion $f: X \rightarrow Y$ som både är injektiv och surjektiv säges vara **bijektiv**, eller en **bijektion**.



Exempel då f är bijektiv



Exempel då f är bijektiv

Definition 3.10. Låt $f: X \rightarrow Y$ vara en bijektiv funktion. **Inversen** till f är avbildningen $f^{-1}: Y \rightarrow X$ som ges av $f^{-1}(y) = x$, där x är det entydiga element i X som uppfyller $f(x) = y$. En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.

Vi ser här att både injektivitet och surjektivitet är viktigt. Om f inte är injektiv kan det finnas många $x \in X$ med $f(x) = y$. Om f inte är surjektiv kan det vara så att det inte finns något x med $f(x) = y$. För inversen gäller att $f(f^{-1}(y)) = y$ för alla $y \in Y$ och $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in X$.

Exempel 3.11. Betrakta funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^3$. Denna funktion är injektiv och surjektiv, och därmed en bijektion. Inversen till f ges av funktionen $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som definieras av $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. ▲

Exempel 3.12. Både definitionsmängden och bildmängden måste beaktas när vi undersöker om en funktion är en bijektion.

Funktionen $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ med $f(x) = x^2$ är en bijektion, med invers $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Som vi såg tidigare är detta påstående är falskt om vi betraktar f definierad på hela \mathbb{R} . ▲

Antag att $f: X \rightarrow Y$ är en injektiv funktion. Då vet vi att vi kan för varje $y \in V_f$ finna ett $x \in X$ sådant att $f(x) = y$. Men, om Y innehåller element som inte finns i V_f är funktionen f inte surjektiv och därmed inte bijektiv. I detta fall är förutsättningarna för en invers inte uppfyllda. Detta kan i många fall, men inte alla, ses som en teknikalitet. Ty, om vi bara skulle ändra på definitionen av f så att målmängden Y exakt var de element vi kunde få (nämligen V_f) så skulle vi ha en bijektiv funktion och alltså en invers. Vi kan säga att varje funktion som är injektiv har en invers definierad på funktionens värdemängd V_f . Dvs, om $g: X \rightarrow V_f$ är injektiv så är den inverterbar.

Exempel 3.13. Låt $f(x) = x + 2$ vara en funktion definierad för $x \in [0, 3]$. Det är en enkel verifikation att se att f är injektiv. Värdemängden till f är $V_f = [2, 5]$. Alltså är f inverterbar om f ses som funktionen $f: [0, 3] \rightarrow [2, 5]$. I detta fall är $f^{-1}: [2, 5] \rightarrow [0, 3]$ och $f^{-1}(y) = y - 2$. ▲

3.2 Egenskaper för reella funktioner

Definition 3.14. Vi säger att en funktion f är **växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) \leq f(y)$. Om en funktion är växande på hela sin definitionsmängd kallas f **växande**.

Observera att den konstanta funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ och $f(x) = 42$ är växande. Den är däremot inte strängt växande som definieras enligt:

Definition 3.15. Vi säger att en funktion f är **strängt växande på ett intervall** $I \subset D_f$ om det för varje $x, y \in I$ för vilka $x < y$ ger att $f(x) < f(y)$. Om en funktion är strängt växande på hela sin definitionsmängd kallas f **strängt växande**.

Definition 3.16. En funktion f är **uppåt obegränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt obegränsad och **uppåt begränsad** om dess värdemängd V_f är uppåt begränsad.

Egenskaper som **avtagande**, **strängt avtagande**, **nedåt obegränsad** och **nedåt begränsad** funktioner definieras på ett analogt sätt.

Exempel 3.17. Låt $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ vara en given funktion positiv funktion. Visa att om $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ med $g(x) = xf(x)$ uppfyller att $V_g = [1, 2]$ så är f obegränsad.

Vi visar detta med hjälp av en motsägelse. Antag att f är uppåt begränsad, d.v.s. V_f är uppåt begränsad, vilket i sin tur ger att det existerar ett tal M sådant $f(x) \leq M$ för varje $x \in (0, 1)$ och $M > 1$. Vi observerar att $1/2M \in (0, 1)$ och att

$$g(1/2M) = \frac{1}{2M} \cdot f(1/2M) \leq \frac{1}{2M} \cdot M = \frac{1}{2} < 1.$$

Detta strider mot att $V_g = [1, 2]$, alltså är f obegränsad. ▲

Definition 3.18. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ säges vara **jämn** om $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Definition 3.19. En funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ säges vara **udda** om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Observera att en funktion som inte är jämn inte behöver vara udda. Exempelvis är $x \mapsto x^3$ udda, $x \mapsto |x|$ jämn och $x \mapsto 1 + x$ varken jämn eller udda.

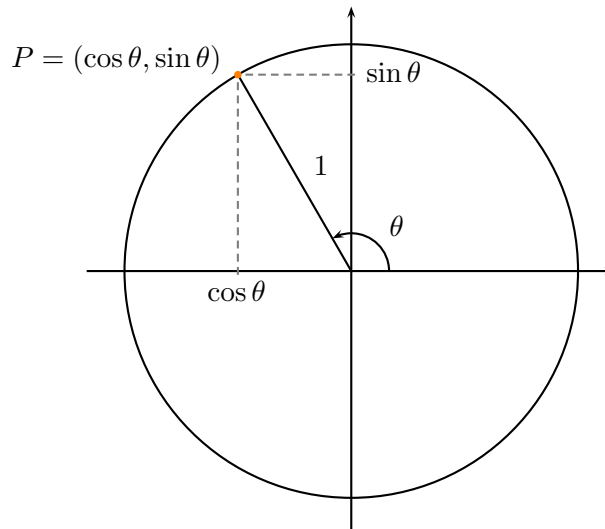
3.3 Trigonometriska funktioner

Vi ska i detta delkapitel definiera sinus och cosinus och vilka grundläggande egenskaper som de besitter.

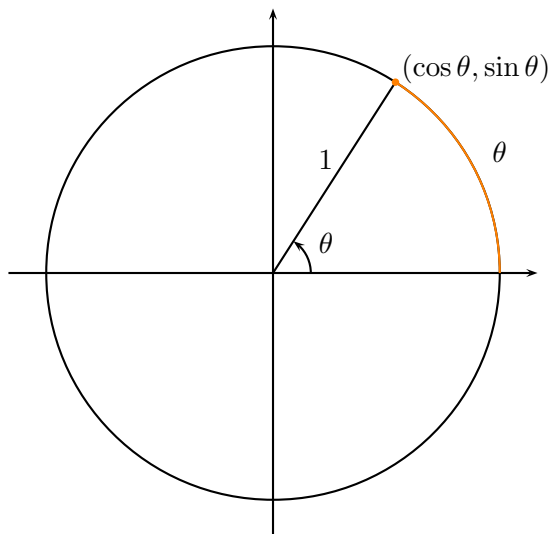
Låt oss betrakta en punkt P på enhetscirkeln vars linje in mot origo bildar vinkeln θ till x -axeln om vi använder orienteringen moturs från x -axeln. Vi kallar koordinaterna i P för $(\cos \theta, \sin \theta)$. Direkt ser vi att

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

vilket kallas för den trigonometriska ettan.



Det är viktigt att vi inför en enhet eller skala för vinkeln θ . Låt oss säga att vinkeln $\theta = 1$ om längden på den cirkelbåge som bildas har längden 1. Denna enhet kallas **radianer** och är på många sätt den naturliga skalan för vinklar. Vi kommer i detta häfte alltid förutsätta att vinklar mäts i radianer.



Vi har bildat funktionerna $\theta \mapsto \cos \theta$ och $\theta \mapsto \sin \theta$ för $\theta \in [0, 2\pi)$. Vi utvidgar dessa funktioner periodiskt till hela \mathbb{R} , d.v.s.

$$\cos \theta = \cos(\theta + n2\pi),$$

$$\sin \theta = \sin(\theta + n2\pi)$$

för alla $n \in \mathbb{Z}$. Funktionen $x \mapsto \sin x$ kallas **sinus** och $x \mapsto \cos x$ kallas **cosinus**.

Av symmetriskäl får vi följande relationer direkt från definitionen ovan

$$\sin \theta = \cos(\theta - \pi/2), \quad (3.1)$$

$$\cos \theta = \sin(\theta + \pi/2), \quad (3.2)$$

$$\cos \theta = \cos(-\theta), \quad (3.3)$$

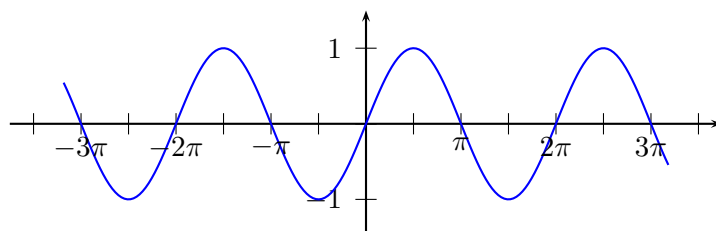
$$\sin \theta = \sin(-\theta), \quad (3.4)$$

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta), \quad (3.5)$$

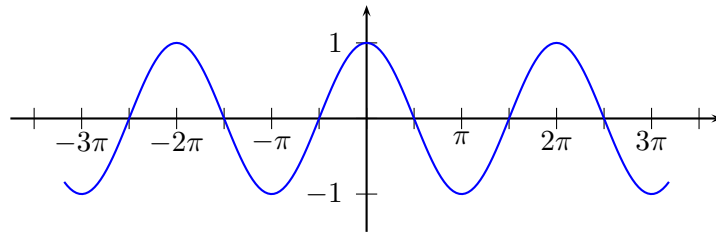
$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta). \quad (3.6)$$

Relationerna (3.3) och (3.4) säger att cosinus och sinus är en jämn respektive udda funktion.

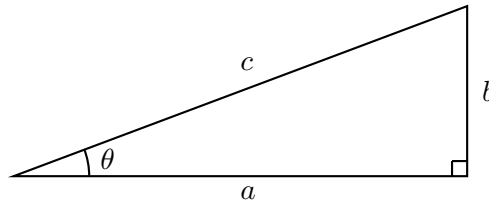
Grafen till funktionerna sinus och cosinus är



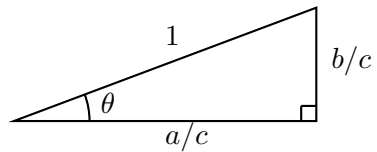
respektive



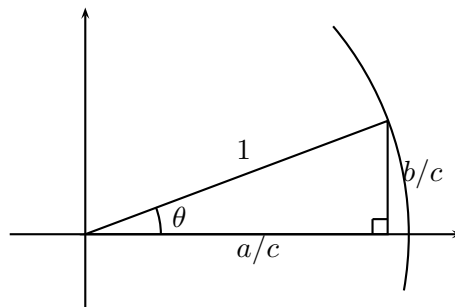
Exempel 3.20. Observera att vi kan med hjälp av sinus och cosinus relatera sidor och vinklar med varandra i rätvinkliga trianglar. Låt oss börja med den rätvinkliga triangeln med sidorna a , b och c



Om vi skalar denna triangel så att hypotenusan får längden 1 så får vi den likformiga triangeln



Om vi nu skriver in denna triangeln i enhetscirkeln så får vi de önskade relationerna



Vi ser att

$$\cos \theta = \frac{a}{c} \quad \text{och} \quad \sin \theta = \frac{b}{c}. \quad (3.7)$$

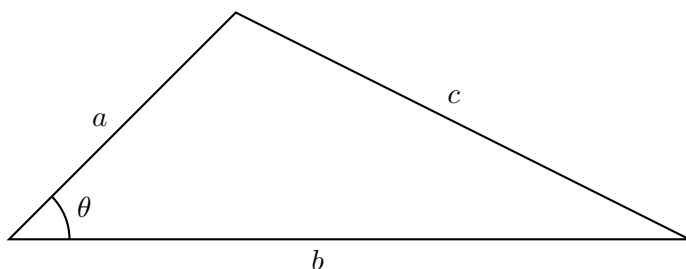
▲

Vi behöver en generalisering av Pythagoras sats som heter Cosinussatsen, nämligen

Sats 3.21 (Cosinussatsen). *Låt a , b och c vara sidlängderna i en triangel. Då gäller att*

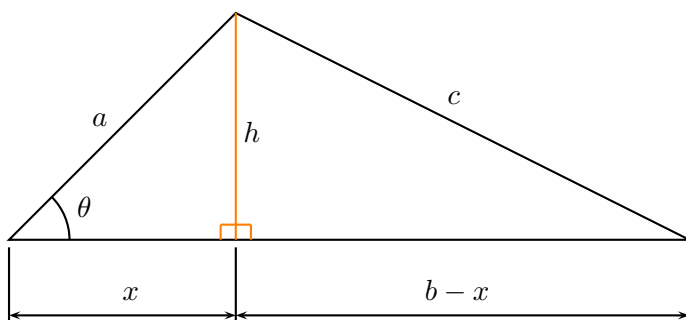
$$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \cos \theta, \quad (3.8)$$

där θ är den vinkel i triangel där sidlängderna a och b möts.



BEVIS: I fallet $\theta = \pi/2$ så återfår vi Pythagoras sats. Vi bevisar satsen för spetsiga och trubbiga vinklar var för sig.

Vi börjar med fallet då vinkeln $\theta < \pi/2$, alltså då θ är spetsig. Vi inför höjden h och låter x vara en del av sidan b som i figuren nedan



Vi använder nu Pythagoras sats i de två rätvinkliga triangelarna och får

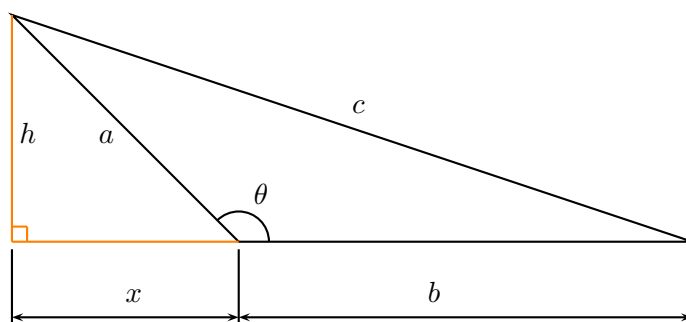
$$\begin{cases} a^2 = h^2 + x^2 \\ c^2 = h^2 + (b-x)^2 \end{cases}$$

Vi löser ut h i den första ekvationen och sätter in resultatet i den andra ekvationen och får

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b-x)^2 = a^2 + b^2 - 2bx.$$

Det återstår att konstatera att $x = a \cos \theta$ vilken följer från formel (3.7).

Det andra fallets lösning är näst intill lika. Med hjälp av en bild lämnar vi det som en övning åt läsaren.



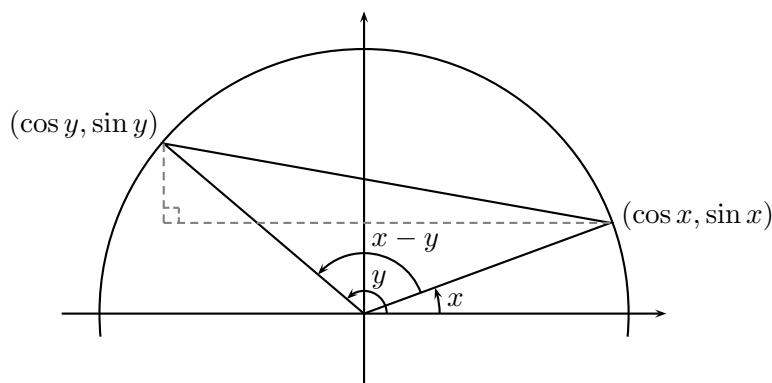
■

Sats 3.22. Följande identitet gäller

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (3.9)$$

BEVIS: Cosinussatsen (se 3.21) ger att

$$(\cos y - \cos x)^2 + (\sin y - \sin x)^2 = 1 + 1 - 2 \cos(x - y).$$



Om vi förenklar med hjälp av den trigonometriska ettan får vi

$$\begin{aligned} 2 - 2 \cos y \cos x - 2 \sin y \sin x &= 2 - 2 \cos(x - y) \\ \cos y \cos x + \sin y \sin x &= \cos(x - y) \end{aligned}$$

vilket skulle bevisas.

■

Följdsats 3.23. Följande identiteter gäller

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (3.10)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (3.11)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (3.12)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad (3.13)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad (3.14)$$

BEVIS: Vi bevisar här (3.10). Låt $y = -z$ i (3.9). Vi får då

$$\begin{aligned}\cos(x+z) &= \cos x \cos(-z) + \sin x \sin(-z) \\ &= \cos x \cos z - \sin x \sin z\end{aligned}$$

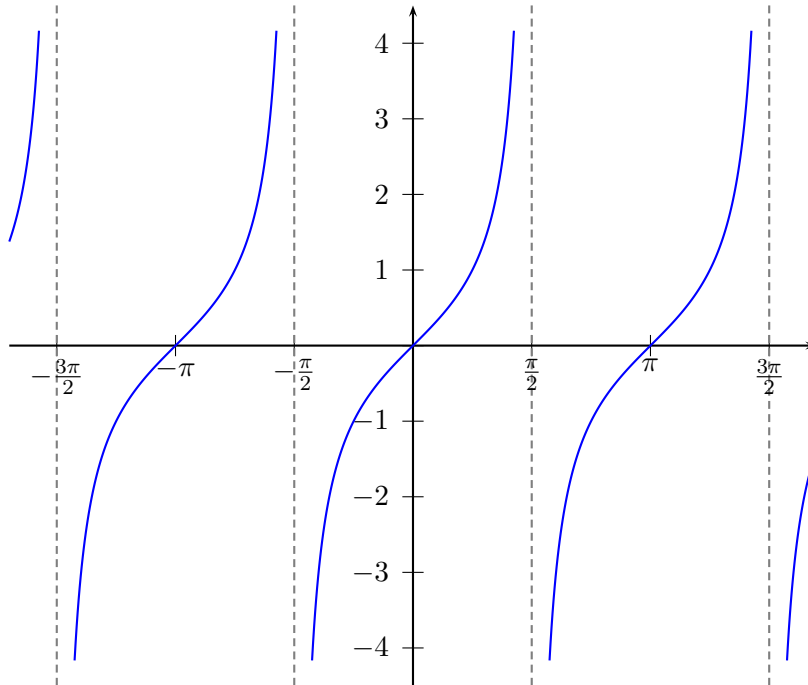
Bevisen för 3.11 – 3.14 följer på liknande vis och med hjälp av (3.1) – (3.6) och lämnas som en övning åt läsaren. ■

Definition 3.24. Funktionen $\tan: \{x \in \mathbb{R}: x \neq n\pi/2, n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, sådan att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad (3.15)$$

kallas **tangens**.

Grafen för tangens är

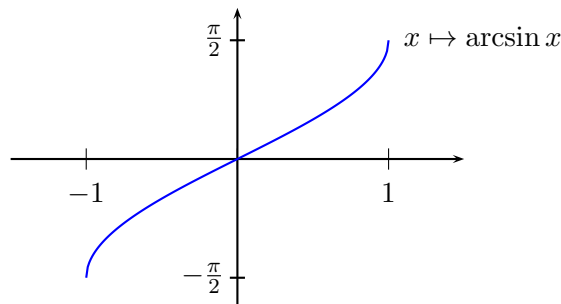


3.4 Cyklometrisk funktioner

Vi börjar med att observera att funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$ är inte injektiv och därmed inte inveterbar, vi har t.ex. att $f(0) = f(\pi)$. Om vi däremot begränsar definitionsmängden D_f till det slutna intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ blir f bijektiv och har invers. Vi gör följande definition:

Definition 3.25. Låt $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \sin x$. Inversen till f kallas **arcussinus** och betecknas $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ och $f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Observera att den generella formeln $\sin(\arcsin y) = y$ gäller för alla $y \in [-1, 1]$ och $\arcsin(\sin x) = x$ gäller för alla $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Grafen för arcussinus är

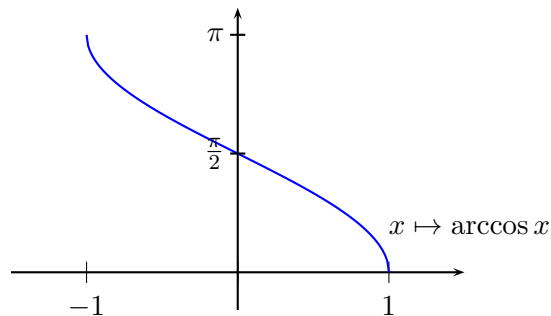


Kommentar 3.26. Vi skulle ha kunnat välja något annat intervall än $[-\pi/2, \pi/2]$ för att få $x \mapsto \sin x$ bijektiv. Detta intervall är dock standardiserat runt om i världen, så om inget annat anges kan man med säkerhet anta att det är detta intervall man menar när man pratar om inversen till $x \mapsto \sin x$.

På liknande sätt konstaterar vi att funktionerna $x \mapsto \cos x$ och $x \mapsto \tan x$ kan göras inverterbara genom att inskränka definitionsmängden.

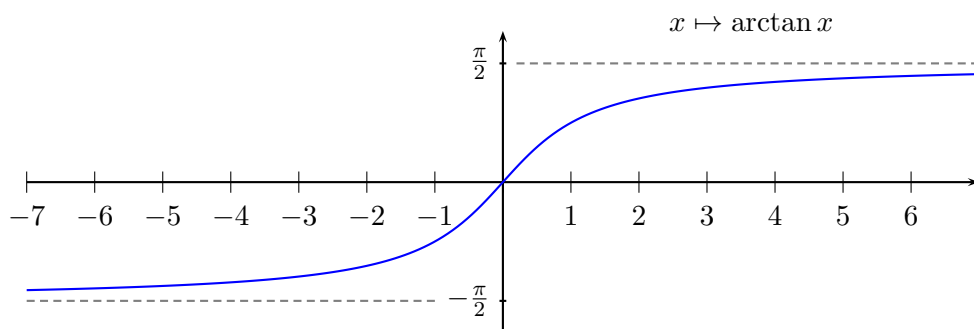
Definition 3.27. Låt $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ sådan att $f(x) = \cos x$. Inversen till f kallas **arcuscosinus** och betecknas $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ och $f^{-1}(y) = \arccos y$.

Grafen för arcuscosinus är



Definition 3.28. Låt $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ sådan att $f(x) = \tan x$. Inversen till f kallas **arctangens** och betecknas $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ och $f^{-1}(y) = \arctan y$.

Grafen för arctangens är

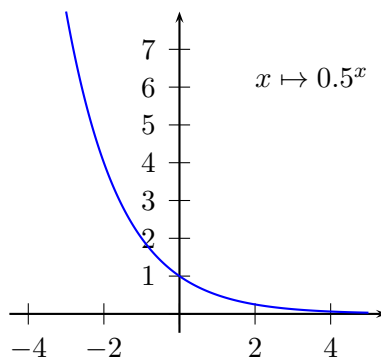
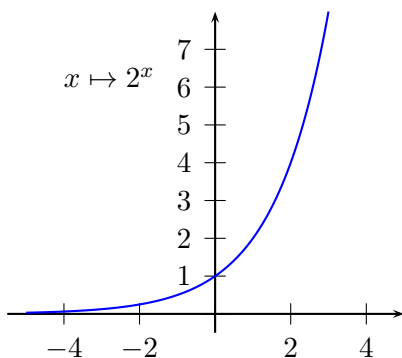


3.5 Exponentialfunktionen

Vi kommer inte i detta häfte definiera exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$, där $a > 1$. Utan framtida anta att läsaren är bekväm med funktionen som en strängt växande funktion med värdemängd $(0, \infty)$ som uppfyller räknelagarna

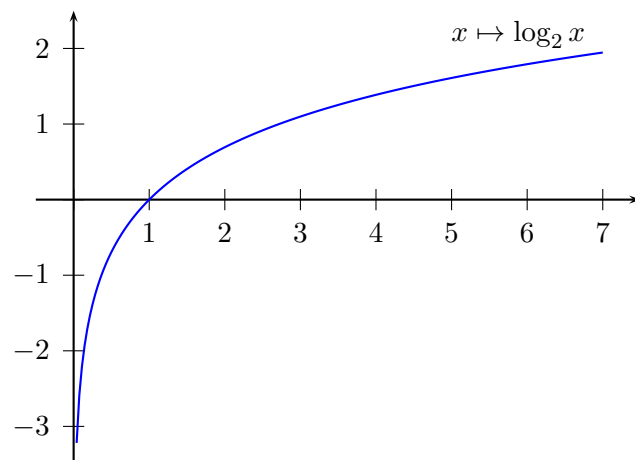
- a) $a^0 = 1$
- b) $a^1 = a$
- c) $a^{x+y} = a^x a^y$
- d) $a^{-x} = 1/a^x$
- e) $(a^x)^y = a^{xy}$

Att introducera exponentialfunktionen på ett korrekt vis är långt ifrån en enkel sak och ligger utanför ramarna för detta häfte. Grafen för exponentialfunktionen är



3.6 Logaritmfunktionen

Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ sådan att $f(x) = a^x$, för något $a > 1$. Då gäller att f är inverterbar. Vi definierar **logaritmfunktionen** som inversen till f och betecknar $f^{-1}(y) = \log_a y$. Alltså har vi att $D_{f^{-1}} = (0, \infty)$ och $V_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Grafen för logaritmfunktionen är



Inversen uppfyller räknelagarna

Sats 3.29. Låt $a > 1$, då gäller att logaritmfunktionen uppfyller

- a) $\log_a 1 = 0$
- b) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x > 0, y > 0$
- c) $\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0$

BEVIS: Generellt gäller att vi vill överföra exponentialfunktionens räknelagar till sin inversfunktion. Vi kommer hela tiden att använda oss av att $x = y$ om och endast om $a^x = a^y$. Detta är en direkt följd av att $x \mapsto a^x$ är injektiv.

- a) Vi vill visa att $\log_a 1 = 0$ eller ekvivalent att $a^{\log_a 1} = a^0$. Vänsterledet uppfyller att $a^{\log_a 1} = 1$ och högerledet att $a^0 = 1$. Alltså stämmer alla påståenden.
- b) Vi vill visa att $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ eller ekvivalent att $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$. För vänsterledet gäller att $a^{\log_a(xy)} = xy$ och för högerledet via exponentialfunktionens räknelagar att $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$.
- c) Vi vill visa att $\log_a x^y = y \log_a x$ eller ekvivalent att $a^{\log_a x^y} = a^{y \log_a x}$. Vänsterledet är x^y och högerledet är $a^{y \log_a x} = (a^{\log_a x})^y = x^y$ och vi är klara.

■

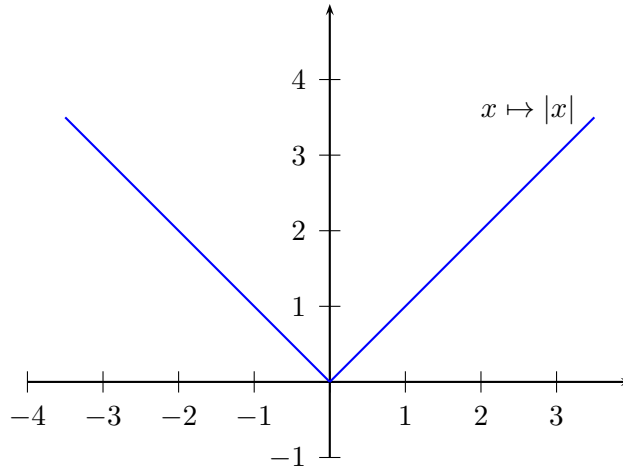
3.7 Absolutbelopp

Givet ett tal $x \in \mathbb{R}$ (eller $\in \mathbb{C}$) så definieras $|x|$ som avståndet från x till origo. Funktionen $x \mapsto |x|$ kallas **absolutbeloppet/beloppet** av x . För reella tal

implicerar detta att

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

och grafen har följande utseende

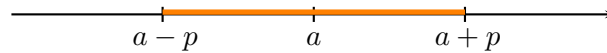


Exempel 3.30. Vi har enligt definitionen att $|-5| = -(-5) = 5$, $|5| = 5$, $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$ och $|0| = 0$. Vi har här varit övertydliga med användningen av minustecken. ▲

I detta häfte kommer vi i ett flertal tillfällen att använda absolutbeloppet på formen $|x - a| = b$ som betyder att avståndet från $x - a$ till origo, eller avståndet från x till a , är b .

Exempel 3.31. Skissa mängden $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq p\}$, där $p > 0$.

Lösningen är



▲

3.8 Övningar

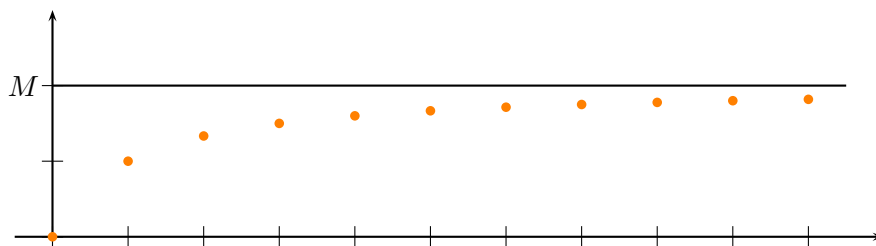
Övning 3.1. Visa den andra delen i beviset av cosinussatsen.

Övning 3.2. Visa 3.11 – 3.14.

4 Talföljder

4.1 Definitionen och konvergens

Definition 4.1. En följd av tal a_1, a_2, a_3, \dots av reella tal kallas för en **talföljd** och betecknas $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är **växande** om $a_{n+1} \geq a_n$ för varje $n \geq 1$ och att den är **uppåt begränsad** om det finns ett tal M sådant att $a_n \leq M$ för varje $n \geq 1$.



Vi definierar på ett analogt sätt vad som menas med att en talföljd är **avtagande** och **nedåt begränsad**. En talföljd sägs vara **begränsad** om den är både uppåt och nedåt begränsad.

Exempel 4.2. Om $a_n = \frac{2n}{n+1}$ så blir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ talföljden $2/2, 4/3, 6/4, 8/5, \dots$. Talföljden är uppåt begränsad av talet 2 men även av talet 14. Den är dessutom växande eftersom

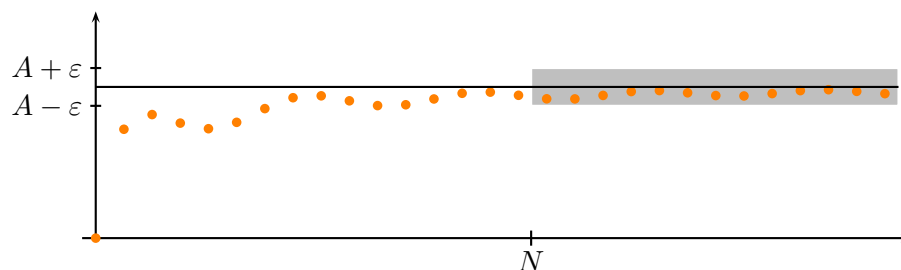
$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

▲

Definition 4.3. En talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sägs **konvergera mot gränsvärdet** A om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_n - A| < \varepsilon$ för varje $n \geq N$. Vi inför beteckningen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

En talföljd med denna egenskap kallas **konvergent**. Om inget sådant A existerar kallas talföljden **divergent**.



Exempel 4.4. Visa att talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där talen ges av $a_n = 2 + 3^{-n}$ konvergerar mot 2 då $n \rightarrow \infty$.

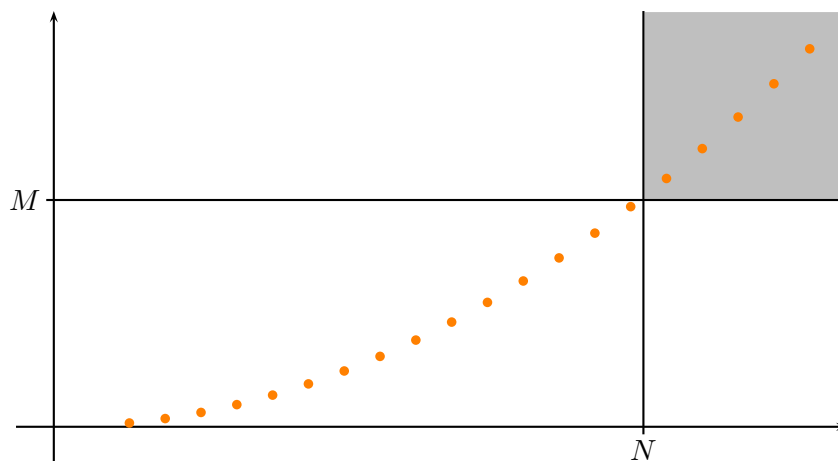
Enligt definitionen ska vi först låta ett tal $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill nu finna ett N (som kommer att bero av ε) sådant att $|a_n - 2| < \varepsilon$ för varje $n \geq N$. Vi ser att

$$|a_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow 3^{-n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 3^n \Leftrightarrow -\log_3 \varepsilon < n$$

där den sista ekvivalensen följer av att logaritmfunktionen är strängt växande. Räkningen visar att $|a_n - 2| < \varepsilon$ är sann då $n > -\log_3 \varepsilon$. Alltså kan vi välja N till något tal större än $-\log_3 \varepsilon$, låt oss ta $N = -42 \log_3 \varepsilon$ i fallet då $\varepsilon \leq 1$ och $N = -1/2 \log_3 \varepsilon$ i fallet då $\varepsilon > 1$. ▲

Vi säger att talföljden $(a_n)_{n=1}^\infty$ har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ om det för varje M existerar ett N sådant att $a_n \geq M$ för varje $n \geq N$. Vi betecknar detta med

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$



Observera att talföljder som har oegentliga gränsvärden är divergenta. Det finns även talföljder som helt saknar gränsvärde, exempelvis $a_n := (-1)^n$, som pendlar mellan -1 och 1 .

Sats 4.5. Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ och $(b_n)_{n=1}^\infty$ vara konvergenta talföljder med gränsvärdena A respektive B . Då följer att

- a) $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet $A + B$,
- b) $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet AB .
- c) om $B \neq 0$ har vi att $(a_n/b_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent med gränsvärdet A/B .
- d) om $a_n \leq b_n$, för varje n så gäller att $A \leq B$.

BEVIS: Vi använder oss av definitionen.

- a) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.

$$|a_n + b_n - A - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 så att

$$|b_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geq N_1$$

och

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{då } n \geq N_2.$$

Detta ger att

$$|a_n + b_n - A - B| \leq \varepsilon, \quad \text{då } n \geq \max(N_1, N_2).$$

- b) Tag $\varepsilon > 0$. Vi vill visa att det finns ett N sådant att $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| \\ &\leq |a_n b_n - a_n B| + |a_n B - AB| \\ &= |a_n| |b_n - B| + |B| |a_n - A|. \end{aligned}$$

Eftersom $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent så är den begränsad, d.v.s. det finns ett tal $K > 0$ sådant att $|a_n| < K$ för varje $n \geq 1$. Då $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot A och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot B får vi att det finns tal N_1 och N_2 sådana att

$$|b_n - B| \leq \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \text{då } n \geq N_1$$

och

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2|B|}, \quad \text{då } n \geq N_2.$$

Detta ger att

$$|a_n b_n - AB| \leq \varepsilon, \quad \text{då } n \geq \max(N_1, N_2).$$

- c) Detta bevis lämnas som en övning åt läsaren.
- d) Låt oss göra ett motsägelsebevis. Antag att $B < A$. Bilda talföljden $c_n = a_n - b_n$. Vi har att $c_n \geq 0$, för varje $n \geq 1$. Talföljden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ har gränsvärdet $C := B - A < 0$. Tag $\varepsilon = -C/2 > 0$. Från definitionen existerar det ett N sådant att $C + C/2 \leq c_n \leq C/2$, för varje $n \geq N$. Men då $C < 0$ så får vi att $c_n \leq C/2 < 0$ för $n \geq N$. Detta strider mot att $c_n \geq 0$, för varje $n \geq 1$. Alltså är $A \geq B$.

■

Sats 4.6. Om $(a_n)_{n=1}^\infty$ är en växande och uppåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

BEVIS: Antag att talföljden är uppåt begränsad av talet M . Vi vet då att alla tal i talföljden är mindre än eller lika stora som M . Låt oss kalla den minsta övre begränsning till $(a_n)_{n=1}^\infty$ för K , d.v.s. $K = \sup a_n : n \geq 1$. Då K är den minsta övre begränsningen till talföljden så finns det element i talföljden godtyckligt nära K (i vissa fall även lika stora som K). Alltså, för varje givet $\varepsilon > 0$ finns ett N sådant att $|a_N - K| < \varepsilon$. Men då talföljden är växande kommer $|a_n - K| < \varepsilon$ för alla $n \geq N$. Vi är klara och har visat att gränsvärdet av talföljden är precis K , d.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = K.$$

■

På samma sätt visas att om $(a_n)_{n=1}^\infty$ är en avtagande och nedåt begränsad talföljd är så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n : n \geq 1\}.$$

4.2 Binomialsatsen

Vi börjar med några exempel för att illustrera vad vi vill åstadkomma i detta delavsnitt.

Exempel 4.7. Antag att det finns fem personer och vi frågar oss följande: På hur många sätt kan dessa bilda en kö, d.v.s. en ordnad följd?

Svaret är att vi har fem möjligheter att välja den första personen, fyra möjligheter att välja den andra personen, o.s.v.. Vi får alltså $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ möjligheter. ▲

Definition 4.8. Låt $n \in \mathbb{N}$, då definieras

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Beteckningen kallas **n -fakultet**.

Exempel 4.9. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en kö bestående av fyra personer. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Svaret är att vi kan välja första personen på tio olika sätt, andra personer på nio olika sätt, tredje personen på åtta olika sätt och slutligen den fjärde personen på sju olika sätt. Alltså finns det

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

olika sätt. Den sista identiteten är där för att illustrera hur svaret beror av parametrarna från frågeställningen. ▲

Läsaren kan själv verifiera att detta resonemang leder till att vi kan välja ut en kö på k personer från n stycken på

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

olika sätt. Här förutsätts att $k \leq n$.

Exempel 4.10. Antag att det finns tio personer och vi vill bilda en grupp bestående av fyra personer. Där ordningen på de utvalda inte spelar någon roll. På hur många sätt kan vi åstadkomma detta?

Vi vet från det tidigare exemplet att varje kö av fyra personer från tio kan väljas ut på $10!/(10-4)!$ olika sätt. Det betyder att om vi nu tar bort den inbördes ordningen så finns varje grupp med $4!$ gånger för mycket. Det vi vill är att dessa $4!$ olika köer är en och samma grupp. Vi måste alltså dividera med $4!$. Svaret är att vi kan välja ut fyra personer av tio till en grupp på

$$\frac{10!}{(10-4)!4!}$$

olika sätt. Det är värt att bekräfta att detta svar är symmetriskt i 4 och $10-4$. Jag menar att vi kunde lika gärna ha valt ut fyra personer genom att välja ut vilka sex personer som inte ska vara med. Att välja ut sex personer från tio till en grupp kan enligt ovan göras på

$$\frac{10!}{(10-6)!6!}$$

olika sätt. I båda fallen är svaret

$$\frac{10!}{4!6!}$$

▲

Mer allmänt

Definition 4.11. Låt $n, k \in \mathbb{N}$ sådana att $k \leq n$. Vi definierar n -över- k som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Vi har alltså definierat en notation och talesätt för svaret på den viktiga frågan: På hur många sätt kan vi välja ut k stycken saker från n stycken?

Vi är nu redo att beskriva satsen som delavsnittet handlar om

Sats 4.12 (Binomialsatsen). Låt $n \in \mathbb{N}$, då gäller att

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

BEVIS: Vänsterledet består av en multiplikation av n stycken faktorer av typen $(a + b)$. Om vi utför parentesmultiplikation så får termer av typen $a^k b^{n-k}$, så att den totala antalet faktorer är n . Frågan är hur många termer av denna typ vi får. Att välja ut k stycken a ur n parenteser kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Alltså är vi klara. ■

4.3 Talet e

Exempel 4.13. Antag att vi har x kr på banken och att banken ger oss xr kr i ränta varje år. Efter ett år har vi alltså $(1 + r)x$ kr. Antag vidare att banken ger oss halva räntan om vi endast har pengarna insatta halva året och analogt för andra tidsperioder av året. I vårt fall betyder det att vi har $(1 + r/2)x$ kr efter ett halvår. Vi kan då utnyttja detta genom att ha x kr insatta ett halvår för att ta ut $(1 + r/2)x$. Nu sätter vi in $(1 + r/2)x$ samma dag och plockar vid årets slut ut $(1 + r/2)$ gånger pengarna, dvs. $(1 + r/2)(1 + r/2)x$. Det senare kan skrivas om som

$$\left(1 + \frac{r}{2}\right) \left(1 + \frac{r}{2}\right) x = \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 x = \left(1 + r + \frac{r^2}{4}\right) x.$$

Vi har vunnit $r^2x/4$ på kuppen.

Om vi nu gör så här varje dag blir det

$$\left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365} x = \left(1 + r + \frac{r^2}{4} + \dots\right) x.$$

Om vi gör det n gånger så blir det

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n x,$$

vad händer nu då $n \rightarrow \infty$?

Det visar sig att detta gränsvärde går mot $e^r x$. Alltså har vi $e^r x$ pengar efter ett år. Vi ser nu att om vi tar ut och sätter in efter ett halvår får vi, $e^{r/2} e^{r/2} x = e^r x$. Alltså är ränta på ränta redan inkluderad. Årsräntan är $1 + r_{year} = e^r$ eller $r_{year} = e^r - 1$. ▲

Definition 4.14. Vi definierar talet

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

För att definitionen ovan skall vara av någon mening så måste vi visa att talföljden är konvergent.

Sats 4.15. Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ med

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

är konvergent.

BEVIS: Vi vill verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad. Låt oss använda binomialsatsen (se sats 4.12)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Vi studerar varje term i detalj.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

För att nu inse att talföljden är växande studerar vi a_n och a_{n+1} .

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

och analogt följer att

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Låt oss jämföra de termer vi får för ett givet k . Vi har att

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$$

vilket ger att

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

För varje k i summorna är termen från a_{n+1} större än den från a_n . Dessutom innehåller a_{n+1} en term mer än a_n som också ger ett positivt bidrag. Alltså är $a_{n+1} > a_n$ för alla $n \geq 1$.

Låt oss nu även verifiera att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad. Återigen använder vi oss av framställningen

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

då varje parantes är mindre än 1.

Vi behöver olikheten $k! > 2^k$ för alla $k \geq 4$. Olikheten kan ekvivalent beskrivas som $k!/2^k > 1$, för alla $k \geq 4$. Vi har följande

$$\frac{k!}{2^k} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{k}{2} \frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2} \frac{4}{2} \frac{3}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{2} > \frac{k}{2} \frac{k-1}{2} \cdots \frac{5}{2} > 1,$$

eftersom varje faktor är större än 1.

Detta passar nu perfekt för vår uppskattning.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^k} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} < 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Vi påminner oss nu om formeln för en geometrisk summa (vilken är enkel att verifiera, hur?),

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

I vårt fall får vi

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 3.$$

Vi har nu visat att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ både är växande och uppåt begränsad vilket ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent. ■

Exempel 4.16. Följande gäller

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Lösningen är

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= [m = -n] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m \\ &= [k = m-1] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = e. \end{aligned}$$

▲

Definition 4.17. Inversen till exponentialfunktionen med e som bas kallas för den **naturliga logaritmfunktionen** och betecknas $x \mapsto \ln x$.

4.4 Standardgränsvärden

Nästa sats säger oss att exponentiell tillväxt är snabbare än polynomiell tillväxt och fakultet växer snabbare än exponentiell tillväxt.

Sats 4.18. *Låt $a > 1$. Då gäller att*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^b} = \infty, \quad (4.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty. \quad (4.2)$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (4.1). Eftersom $a > 1$ så gäller att $a^{1/b} > 1$. Vi låter $a^{1/b} = 1 + p$, där $p > 0$. Vi har att

$$\frac{a^n}{n^b} = \left(\frac{a^{n/b}}{n} \right)^b = \left(\frac{(1+p)^n}{n} \right)^b.$$

Det räcker nu att visa att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+p)^n}{n} = \infty.$$

Med hjälp av binomialsatsen (se sats 4.12), där vi endast kommer att utnyttja en term, får vi

$$\frac{(1+p)^n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k \geq \frac{1}{n} \binom{n}{2} p^2 = \frac{n(n-1)p^2}{2n} = \frac{(n-1)p^2}{2} \rightarrow \infty,$$

då $n \rightarrow \infty$.

Låt oss nu visa (4.2). Bilda

$$c_n = \frac{n!}{a^n}.$$

Låt N vara sådant att $N > 2a$ och notera att

$$c_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{a \cdot a^n} = \frac{n+1}{a} c_n.$$

Vi har att

$$c_{N+j} = \frac{N+j}{a} \cdot \frac{N+j-1}{a} \cdots \frac{N+1}{a} c_N \geq 2^j c_N \rightarrow \infty,$$

då $j \rightarrow \infty$. ■

4.5 Bolzano-Weierstrass sats

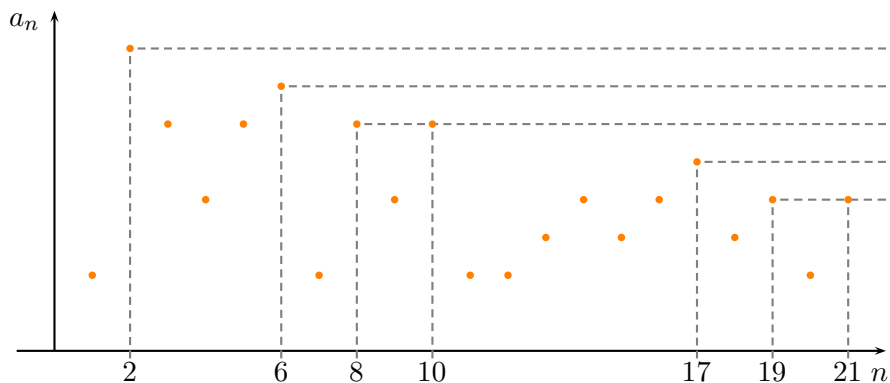
Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd. Om vi endast studerar en del av talen a_n , men fortfarande oändligt många, i talföljden och bildar en egen talföljd av dessa så sägs denna nya talföljd vara en **delföljd** av den ursprungliga talföljden. Den nya talföljden betecknas ofta $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, där $n_k \in \mathbb{N}$ är en strängt växande talföljd. Vi ger ett exempel för att klargöra notationen.

Exempel 4.19. Låt $a_n = 2n$. Talföljden $(a_n)_{n=1}^\infty$ ges då av 2, 4, 6, 8, \dots . En delföljd till denna är när vi endast betraktar var femte tal, alltså 2, 12, 22, 32, \dots . Den nya talföljden betecknas $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, där $n_k = 5(k-1) + 1$. D.v.s., för n_1 (då $k = 1$) får vi $a_{n_1} = a_1 = 2$, för n_2 (då $k = 2$) får vi $a_{n_2} = a_6 = 12$, o.s.v. ▲

Sats 4.20 (Bolzano-Weierstrass sats). *Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ vara en begränsad talföljd. Då finns det en konvergent delföljd.*

BEVIS: Om vi lyckas visa att det finns en växande eller avtagande delföljd så vet vi från sats 4.6 att den kommer att vara konvergent.

Låt $A = \{n : a_n \geq a_m, \text{ för varje } m \geq n\}$. Mängden A beskriver alla index av tal i $(a_n)_{n=1}^\infty$ sådana att alla resterande tal i följderna är mindre eller lika med talet.



I figuren ovan innehåller A indexen 2, 6, 8, 10, 17, 19, 21, \dots

Om antalet index i A är oändligt många så har vi funnit en avtagande delföljd. Nämligen $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$, där $n_k, k = 1, 2, 3, \dots$, är indexen i A ordnade i en växande följd.

Om antalet index i A är ändligt många så finns det ett största index i A om nu inte A är tomma mängden, låt oss kalla detta index för M . Nu kan vi välja vårt första tal i talföljden $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ till a_{M+1} eller a_1 i fallet att A var tomma mängden. Eftersom detta index är större än M så finns det större tal än a_{M+1} i talföljden $(a_n)_{n=M+1}^\infty$. Låt n_2 vara ett index sådant att $a_{n_2} > a_{M+1}$. Eftersom $n_2 \notin A$ så finns det ett index $n_3 > n_2$ sådant att $a_{n_3} > a_{n_2}$. Denna process leder till en växande talföljd $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ som är konvergent enligt sats 4.6. ■

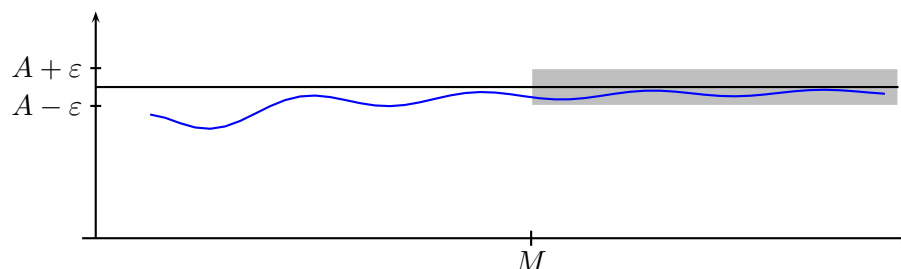
Övning 4.1. Bevisa sats 4.5 c).

5 Gränsvärden av funktioner vid oändligheten

Definition 5.1. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a . Vi säger att f **konvergerar** mot gränsvärdet A då x går mot ∞ om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett M sådant att $|f(x) - A| \leq \varepsilon$ för varje $x \geq M$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

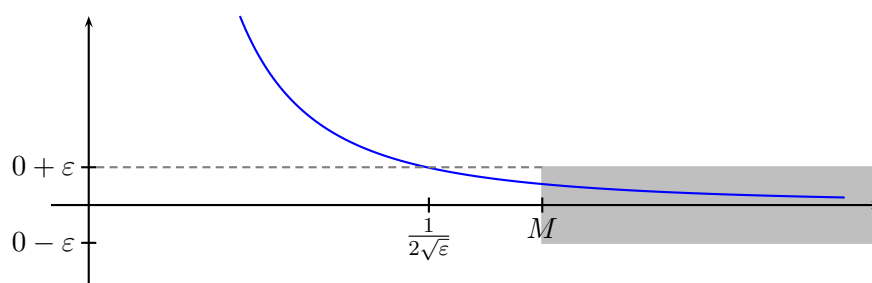
Alternativt skriver vi att $f(x) \rightarrow A$ då $x \rightarrow \infty$. Om inget sådant A existerar kallas f **divergent** då x går mot ∞ .



Exempel 5.2. Visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

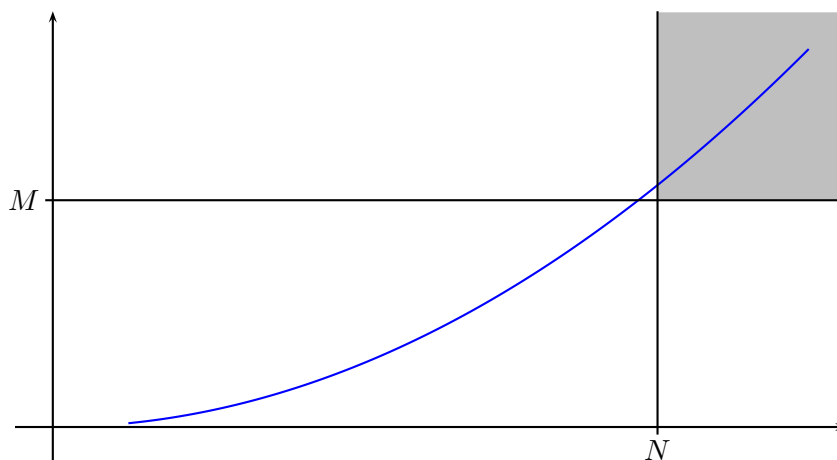
Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill visa att det finns ett M sådant att $|f(x) - 0| \leq \varepsilon$ för varje $x \geq M$. Vi har att $|f(x) - 0| \leq \varepsilon$ om och endast om $\frac{1}{4x^2} \leq \varepsilon$. Det senare gäller om och endast om $x \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$. Vi kan alltså välja M till något tal större än $\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}$.



Observera att M är beroende av ε . Förändras ε så kan vi behöva byta värdet på M . Vi kan förtydliga detta genom att skriva $M = M(\varepsilon)$. ▲

Definition 5.3. Låt f vara en funktion definierad i (a, ∞) för något a . Vi säger att f har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då x går mot ∞ om det för varje K finns ett M sådant att $f(x) > K$ för varje $x \geq M$. Vi skriver detta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$



På samma vis som ovan definierar vi gränsvärden och oegentliga gränsvärden mot $-\infty$.

Precis som för talföljder så gäller följande sats (jämför med sats 4.5).

Sats 5.4. Låt f och g vara funktioner definierade i intervallet (a, ∞) för något a och låt $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$, då $x \rightarrow \infty$. Då följer att

- a) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$, då $x \rightarrow \infty$,
- b) $f(x)g(x) \rightarrow AB$, då $x \rightarrow \infty$,
- c) om $B \neq 0$ så följer att $f(x)/g(x) \rightarrow A/B$, då $x \rightarrow \infty$.
- d) om $f(x) \leq g(x)$, för alla $x \in (a, \infty)$ så gäller att $A \leq B$.

Beviset för denna sats sammanfaller sånär som på notation beviset för sats 4.5. Det är lämnat till läsaren, som en övning i notation, att utföra dessa bevis.

Det är värt att notera att vi kan tillåta att $A = \infty$ och/eller $B = \infty$ med de formella räknereglerna:

$$\begin{aligned} \infty \cdot \infty &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \\ x \cdot \infty &= \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R} \text{ och } x > 0 \\ x + \infty &= \infty, \quad \text{där } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Observera dock att följande uttryck är odefinierade

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty$$

Sats 5.5. Låt $a > 1$ och $b > 0$ då gäller följande gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^b} = \infty, \tag{5.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \infty. \tag{5.2}$$

BEVIS: Vi börjar med att visa (5.1) genom att överföra problemet på (4.1). Vi låter $[x]$ vara heltalsdelen av x , d.v.s. det största heltal som är mindre än x . Precis som i beviset av (4.1) så räcker det med att visa att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x} = \infty.$$

Vi har för $x \geq 1$ att

$$\frac{a^x}{x} \geq \frac{a^{[x]}}{2[x]} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{[x]}}{[x]} \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

då $[x] \rightarrow \infty$, enligt (4.1).

För att visa (5.2) så låter vi $x = a^t$. Detta medför att $x \rightarrow \infty$ blir ekvivalent med att $t \rightarrow \infty$. Vi får alltså att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{\log_a x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^{bt}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a^b)^t}{t} = \infty, \quad (5.4)$$

enligt (5.1). ■

5.1 Övningar

Övning 5.1. Bevisa sats 5.4

Övning 5.2. Bestäm gränsvärdet av $x \mapsto x^{1/x}$, då $x \rightarrow \infty$.